Câteva aplicaţii ale inegalităţii Ionescu - Weitzenböck

Dumitru M. BĂTINEŢU-GIURGIU [1], ***Neculai STANCIU*** [2]

Abstract. The purpose of the present note is to establish some applications of the inequality Ionescu- Weitzenböck.

Keywords: Ionescu-Weitzenböck inequality, Bergström′s inequality, Radon′s inequality.

MSC 2010: 51M16.

ION IONESCU (BIZEŢ) (1870-1946) s-a născut la 22 noiembrie/4 decembrie 1870 în satul Stoienoaia, comuna Creaţa-Leşile, judeţul Ilfov. În anul 1889 a reuşit primul la Şcoala Naţională de Poduri şi Şosele din Bucureşti, unde obţine diploma de inginer cu nota 18,42 (nota maximă fiind 20).

În anul 1895 înfiinţează Gazeta Matematică împreună cu *Victor Balaban, Vasile Cristescu, Mihail Roco, Ion Zotta, Emanoil Davidescu, Mauriciu Kinbaum, Nicolae Nicolescu, Tancred Constantinescu* şi *Andrei Ioachimescu*. În 31 august 1909, la o şedinţă a redacţiei Gazetei Matematice, ţinută la via lui Ion Ionescu se decide înfiinţarea Societăţii Gazeta Matematică. A fost unul din "Stâlpii Gazetei Matematice", alături de *Vasile Cristescu, Andrei Ioachimescu* şi *Gheorghe Ţiţeica*.

Din 1921 se dedică învăţământului de la Şcoala Politehnică din Bucureşti, profesor de bază al acestei instituţii.

A condus lucrările de proiectare şi construcţie a numeroase poduri, printre care podul peste Borcea (prima porţiune a podului peste Dunăre), podul de la Bobolia pe Valea Prahovei etc. În 1900, la Giurgiu se impunea realizarea unui pod peste canalul Sf. Gheorghe, care să lege portul situat pe malul Dunării cu celelalte regiuni printr-o legătură dublă şosea-cale ferată. Coordonează proiectarea şi construcţia podului peste un braţ al Dunării din bazinul de la Giurgiu. Condiţiile de teren făceau aproape imposibilă această realizare, dar *Ion Ionescu* a găsit o soluţie excepţională; podul dublu, cale ferată şi şosea, are o formă curbă, unică la vremea aceea în lume. Prin această lucrare, inaugurată în 1905, *Ion Ionescu-Bizeţ* a rămas în istoria oraşului Giurgiu. Podul este folosit şi în prezent, după o utilizare de peste 100 de ani, şi poartă numele de Podul Bizeţ.

A elaborat proiectul pentru şantierul naval de la Turnu-Severin. Este autorul unui studiu de deviere spre Prut a apelor Siretului în vederea construcţiei unei centrale hidroelectrice şi a transformării Prutului într-un canal navigabil între Galaţi şi Iaşi. A executat harta hidrografică a bazinului Dunării.

Pentru meritele sale, a fost ales în 1919 membru corespondent al Academiei Române, secţia ştiinţifică. Alături de *Gheorghe Lazăr, Gheorghe Asachi, Ion Heliade Rădulescu, Spiru Haret, Petrache Poenaru* şi *Gheorghe Duca*, a fost ctitor al învăţământului tehnic românesc.

A încetat din viaţă la 17 septembrie 1946. A lăsat prin testament Societăţii Gazeta Matematică (astăzi numită SSMR), casa sa din Str. Răsuri, nr. 25.

În [**1**] am arătat că **Ion Ionescu** a publicat cu 22 de ani înaintea lui *Roland Weitzenböck* inegalitatea $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}$, adevărată în orice triunghi. Într-adevăr, în *Gazeta Matematică* vol.III, nr. 2 (oct. 1897), p. 52, sub semnătura lui Ion Ionescu apare problema:

[1]Profesor, Colegiul Naţional ,,Matei Basarab", Bucureşti

[2]Profesor, Şcoala Generală ,,George Emil Palade", Buzău

273. *Să se arate că nu există nici un triunghiu pentru care inegalitatea*

$$4S\sqrt{3} > a^2 + b^2 + c^2$$

să fie satisfăcută.

Abia în 1919, în articolul *Über eine Ungleichung in der Dreiecksgeometrie* publicat în revista *Mathematische Zeitung*, vol. 5, nr.1-2, pp. 137-146, apare inegalitatea care în mod curent poartă numele lui *R. Weitzenböck*.

Această inegalitate a fost numită de noi în [**1**] *inegalitatea Ionescu-Weitzenböck*.

În prezenta notă vom da câteva aplicaţii ale sale.

Aplicaţia 1. *În orice triunghi ABC, are loc inegalitatea:*

$$\frac{a^3}{b\cdot R + c\cdot r} + \frac{b^3}{c\cdot R + a\cdot r} + \frac{c^3}{a\cdot R + b\cdot r} \geq \frac{4\sqrt{3}}{R+r}S. \tag{1}$$

Soluţie. Avem, aplicând *inegalitatea lui Bergström*:

$$U = \sum_{ciclic} \frac{a^3}{b\cdot R + c\cdot r} = \sum_{ciclic} \frac{a^4}{abR + acr} \geq 2\sum_{ciclic} \frac{(a^2)^2}{(a^2+b^2)R + (a^2+c^2)r}$$

$$\geq 2\frac{(\sum\limits_{ciclic} a^2)^2}{\sum\limits_{ciclic} R(a^2+b^2) + \sum\limits_{ciclic} r(a^2+c^2)} = 2\frac{(\sum\limits_{ciclic} a^2)^2}{2(R+r)\sum\limits_{ciclic} a^2} = \frac{\sum\limits_{ciclic} a^2}{R+r}.$$

Mai departe, aplicăm *inegalitatea Ionescu- Weitzenböck*, adică $\sum\limits_{ciclic} a^2 \geq 4S\sqrt{3}$, şi rezultă că $U \geq \frac{4S\sqrt{3}}{R+r}$, ceea ce era de demonstrat.

În acelaşi fel se stabileşte şi următorul rezultat:

Aplicaţia 2. *În orice triunghi ABC, are loc inegalitatea:*

$$\frac{m_a^3}{R\cdot m_b + r\cdot m_c} + \frac{m_b^3}{R\cdot m_c + r\cdot m_a} + \frac{m_c^3}{R\cdot m_a + r\cdot m_b} \geq \frac{3\sqrt{3}}{R+r}S. \tag{2}$$

Soluţie. Avem, utilizând *inegalitatea lui Bergström* şi formula bine-cunoscută $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \dfrac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$:

$$V = \sum_{ciclic} \frac{m_a^3}{R\cdot m_b + r\cdot m_c} = \sum_{ciclic} \frac{(m_a^2)^2}{R\cdot m_a\cdot m_b + r\cdot m_a\cdot mc}$$

$$\leq 2\sum_{ciclic} \frac{(m_a^2)^2}{R(m_a^2+m_b^2) + r(m_a^2+m_c^2)} \geq 2\frac{(\sum\limits_{ciclic} m_a^2)^2}{R\sum\limits_{ciclic}(m_a^2+m_b^2) + r\sum\limits_{ciclic}(m_a^2+m_c^2)} =$$

$$= \frac{2(\sum\limits_{ciclic} m_a^2)^2}{2R\sum\limits_{ciclic} m_a^2 + 2r\sum\limits_{ciclic} m_a^2} = \frac{\sum\limits_{ciclic} m_a^2}{R+r} = \frac{3}{4}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{R+r},$$

unde folosim *inegalitatea Ionescu-Weitzenböck*, i.e. $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}$, şi deducem că:

$$V \geq \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{R+r} \cdot 4S\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{R+r} S.$$

Următoarele generalizări ale inegalităţilor (1) şi (2) se obţin la fel, dar folosind *inegalitatea lui Radon*:

Aplicaţia 3. *Dacă $x \in R_+$, atunci în orice triunghi ABC are loc inegalitatea:*

$$\frac{a^{x+2}}{(b \cdot R + c \cdot r)^x} + \frac{b^{x+2}}{(c \cdot R + a \cdot r)^x} + \frac{c^{x+2}}{(a \cdot R + b \cdot r)^x} \geq \frac{4\sqrt{3}}{(R+r)^x} S. \tag{3}$$

Aplicaţia 4. *Dacă $x \in \mathbb{R}_+$, atunci în orice triunghi ABC are loc inegalitatea:*

$$\frac{m_a^{x+2}}{(R \cdot m_b + r \cdot m_c)^x} + \frac{m_b^{x+2}}{(R \cdot m_c + r \cdot m_a)^x} + \frac{m_c^{x+2}}{(R \cdot m_a + r \cdot m_b)^x} \geq \frac{3\sqrt{3}}{(R+r)^x} S. \tag{4}$$

Bibliografie

1. **D.M. Bătineţu-Giurgiu, Neculai Stanciu** – *Inegalităţi de tip Ionescu-Weitzenböck*, Arch. Math., 86 (2006), 481–489.

Recreaţii ... matematice

Utilizând ca model următoarele scheme:

$$\begin{array}{c} 1\ \ 2\ \ 3 \\ 6\ \ 6 \\ 6 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 2\ \ 4\ \ 3 \\ 9\ \ 24 \\ 72 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 5\ \ 1\ \ 3 \\ 8\ \ 15 \\ 120 \end{array}$$

să se completeze, înlocuind steluţele cu numere naturale nenule, schemele:

$$\begin{array}{c} *\ \ *\ \ * \\ 4\ \ * \\ * \end{array} \qquad \begin{array}{c} *\ \ *\ \ * \\ *\ \ 7 \\ * \end{array} \qquad \begin{array}{c} *\ \ *\ \ * \\ *\ \ * \\ 15 \end{array}$$

(Răspuns la pag. 118)