

Câteva aplicații ale inegalității Ionescu - Weitzenböck

*Dumitru M. BĂȚINEȚU-GIURGIU*¹, *Neculai STANCIU*²

Abstract. The purpose of the present note is to establish some applications of the inequality Ionescu- Weitzenböck.

Keywords: Ionescu-Weitzenböck inequality, Bergström's inequality, Radon's inequality.

MSC 2010: 51M16.

ION IONESCU (BIZET) (1870-1946) s-a născut la 22 noiembrie/4 decembrie 1870 în satul Stoienoaia, comuna Creața-Leșile, județul Ilfov. În anul 1889 a reușit primul la Școala Națională de Poduri și Șosele din București, unde obține diploma de inginer cu nota 18,42 (nota maximă fiind 20).

În anul 1895 înființează *Gazeta Matematică* împreună cu *Victor Babalan*, *Vasile Cristescu*, *Mihail Roco*, *Ion Zotta*, *Emanoil Davidescu*, *Mauriciu Kinbaum*, *Nicolae Nicolescu*, *Tancred Constantinescu* și *Andrei Ioachimescu*. În 31 august 1909, la o ședință a redacției *Gazetei Matematice*, ținută la via lui Ion Ionescu se decide înființarea Societății *Gazeta Matematică*. A fost unul din "Stâlpii *Gazetei Matematice*", alături de *Vasile Cristescu*, *Andrei Ioachimescu* și *Gheorghe Țițeica*.

Din 1921 se dedică învățământului de la Școala Politehnică din București, profesor de bază al acestei instituții.

A condus lucrările de proiectare și construcție a numeroase poduri, printre care podul peste Borcea (prima porțiune a podului peste Dunăre), podul de la Bobolia pe Valea Prahovei etc. În 1900, la Giurgiu se impunea realizarea unui pod peste canalul Sf. Gheorghe, care să lege portul situat pe malul Dunării cu celelalte regiuni printr-o legătură dublă șosea-cale ferată. Coordonează proiectarea și construcția podului peste un braț al Dunării din bazinul de la Giurgiu. Condițiile de teren făceau aproape imposibilă această realizare, dar *Ion Ionescu* a găsit o soluție excepțională; podul dublu, cale ferată și șosea, are o formă curbă, unică la vremea aceea în lume. Prin această lucrare, inaugurată în 1905, *Ion Ionescu-Bizet* a rămas în istoria orașului Giurgiu. Podul este folosit și în prezent, după o utilizare de peste 100 de ani, și poartă numele de Podul Bizet.

A elaborat proiectul pentru șantierul naval de la Turnu-Severin. Este autorul unui studiu de deviere spre Prut a apelor Siretului în vederea construcției unei centrale hidroelectrice și a transformării Prutului într-un canal navigabil între Galați și Iași. A executat harta hidrografică a bazinului Dunării.

Pentru meritele sale, a fost ales în 1919 membru corespondent al Academiei Române, secția științifică. Alături de *Gheorghe Lazăr*, *Gheorghe Asachi*, *Ion Heliade Rădulescu*, *Spiru Haret*, *Petrache Poenaru* și *Gheorghe Duca*, a fost ctitor al învățământului tehnic românesc.

A încetat din viață la 17 septembrie 1946. A lăsat prin testament Societății *Gazeta Matematică* (astăzi numită SSMR), casa sa din Str. Răsuri, nr. 25.



În [1] am arătat că **Ion Ionescu** a publicat cu 22 de ani înaintea lui *Roland Weitzenböck* inegalitatea $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}$, adevărată în orice triunghi. Într-adevăr, în *Gazeta Matematică* vol.III, nr. 2 (oct. 1897), p. 52, sub semnătura lui Ion Ionescu apare problema:

¹Profesor, Colegiul Național „Matei Basarab”, București

²Profesor, Școala Generală „George Emil Palade”, Buzău

273. Să se arate că nu există nici un triunghi pentru care inegalitatea

$$4S\sqrt{3} > a^2 + b^2 + c^2$$

să fie satisfăcută.

Abia în 1919, în articolul *Über eine Ungleichung in der Dreiecksgeometrie* publicat în revista *Mathematische Zeitung*, vol. 5, nr.1-2, pp. 137-146, apare inegalitatea care în mod curent poartă numele lui *R. Weitzenböck*.

Această inegalitate a fost numită de noi în [1] *inegalitatea Ionescu-Weitzenböck*.

În prezenta notă vom da câteva aplicații ale sale.

Aplicația 1. În orice triunghi ABC , are loc inegalitatea:

$$(1) \quad \frac{a^3}{b \cdot R + c \cdot r} + \frac{b^3}{c \cdot R + a \cdot r} + \frac{c^3}{a \cdot R + b \cdot r} \geq \frac{4\sqrt{3}}{R+r} S.$$

Soluție. Avem, aplicând *inegalitatea lui Bergström*:

$$\begin{aligned} U &= \sum_{cyclic} \frac{a^3}{b \cdot R + c \cdot r} = \sum_{cyclic} \frac{a^4}{abR + acr} \geq 2 \sum_{cyclic} \frac{(a^2)^2}{(a^2 + b^2)R + (a^2 + c^2)r} \\ &\geq 2 \frac{(\sum_{cyclic} a^2)^2}{\sum_{cyclic} R(a^2 + b^2) + \sum_{cyclic} r(a^2 + c^2)} = 2 \frac{(\sum_{cyclic} a^2)^2}{2(R+r) \sum_{cyclic} a^2} = \frac{\sum_{cyclic} a^2}{R+r}. \end{aligned}$$

Mai departe, aplicăm *inegalitatea Ionescu-Weitzenböck*, adică $\sum_{cyclic} a^2 \geq 4S\sqrt{3}$, și rezultă că $U \geq \frac{4S\sqrt{3}}{R+r}$, ceea ce era de demonstrat.

În același fel se stabilește și următorul rezultat:

Aplicația 2. În orice triunghi ABC , are loc inegalitatea:

$$(2) \quad \frac{m_a^3}{R \cdot m_b + r \cdot m_c} + \frac{m_b^3}{R \cdot m_c + r \cdot m_a} + \frac{m_c^3}{R \cdot m_a + r \cdot m_b} \geq \frac{3\sqrt{3}}{R+r} S.$$

Soluție. Avem, utilizând *inegalitatea lui Bergström* și formula bine-cunoscută $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$:

$$\begin{aligned} V &= \sum_{cyclic} \frac{m_a^3}{R \cdot m_b + r \cdot m_c} = \sum_{cyclic} \frac{(m_a^2)^2}{R \cdot m_a \cdot m_b + r \cdot m_a \cdot m_c} \\ &\leq 2 \sum_{cyclic} \frac{(m_a^2)^2}{R(m_a^2 + m_b^2) + r(m_a^2 + m_c^2)} \geq 2 \frac{(\sum_{cyclic} m_a^2)^2}{R \sum_{cyclic} (m_a^2 + m_b^2) + r \sum_{cyclic} (m_a^2 + m_c^2)} = \\ &= \frac{2(\sum_{cyclic} m_a^2)^2}{2R \sum_{cyclic} m_a^2 + 2r \sum_{cyclic} m_a^2} = \frac{\sum_{cyclic} m_a^2}{R+r} = \frac{3}{4} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{R+r}, \end{aligned}$$

unde folosim *inegalitatea Ionescu-Weitzenböck*, i.e. $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}$, și deducem că:

$$V \geq \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{R+r} \cdot 4S\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{R+r} S.$$

Următoarele generalizări ale inegalităților (1) și (2) se obțin la fel, dar folosind *inegalitatea lui Radon*:

Aplicația 3. Dacă $x \in \mathbb{R}_+$, atunci în orice triunghi ABC are loc inegalitatea:

$$(3) \quad \frac{a^{x+2}}{(b \cdot R + c \cdot r)^x} + \frac{b^{x+2}}{(c \cdot R + a \cdot r)^x} + \frac{c^{x+2}}{(a \cdot R + b \cdot r)^x} \geq \frac{4\sqrt{3}}{(R+r)^x} S.$$

Aplicația 4. Dacă $x \in \mathbb{R}_+$, atunci în orice triunghi ABC are loc inegalitatea:

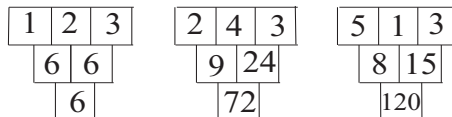
$$(4) \quad \frac{m_a^{x+2}}{(R \cdot m_b + r \cdot m_c)^x} + \frac{m_b^{x+2}}{(R \cdot m_c + r \cdot m_a)^x} + \frac{m_c^{x+2}}{(R \cdot m_a + r \cdot m_b)^x} \geq \frac{3\sqrt{3}}{(R+r)^x} S.$$

Bibliografie

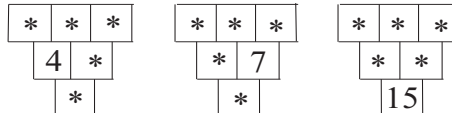
1. **D.M. Bătinețu-Giurgiu, Neculai Stanciu** – *Inegalități de tip Ionescu-Weitzenböck*, Arch. Math., 86 (2006), 481–489.

Recreații ... matematice

Utilizând ca model următoarele scheme:



să se completeze, înlocuind stelutele cu numere naturale nenule, schemele:



(Răspuns la pag. 118)