Câteva generalizări şi rafinări ale inegalităţii $x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+yz+zx$

Mihály BENCZE[1]

Abstract. In this paper we present some generalizations and refinements for classical inequlity $x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+yz+zx$.
Keywords: classical inequalities.
MSC 2010: 97H30.

Propoziţia 1. *Dacă $x>0$ şi $n \in \mathbb{N}$, atunci are loc inegalitatea*

$$(x^2+1)^n \geq (x^n-1)^2+2^n x^n, \tag{1}$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $x=1$.

Demonstraţie. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=(x^2+1)^n-(x^n-1)^2-2^n x^n$. Vom scrie f în două moduri, după cum urmează (în calcule se ţine seama de faptul că $2^n x^n = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^n$):

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{2(n-k)}-(x^{2n}-2x^n+1)-2^n x^n = \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^{2(n-k)}-x^n)-x^{2n}+2x^n-1=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}(x^{2(n-k)}-x^n); \\ f(x) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{2k}-(x^{2n}-2x^n+1)-2^n x^n=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}(x^{2k}-x^n). \end{aligned}$$

Prin adunare, obţinem:

$$2f(x)=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}(x^{n-k}-x^k)^2$$

şi, deci, $f(x)\geq 0$, adică inegalitatea (1).

Corolarul 1.1. *Dacă $a_k>0$, $k=\overline{1,m}$, atunci pentru orice $n\in\mathbb{N}$ au loc inegalităţile*

$$\sum_{ciclic}\left(\frac{a_1^2+a_2^2}{2}\right)^n \geq \sum_{ciclic}(a_1a_2)^n+\frac{1}{2^n}\sum_{ciclic}(a_1^n-a_2^n)^2 \geq \sum_{ciclic}(a_1a_2)^n, \tag{2}$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $a_1=a_2=\cdots=a_m$.

Demonstraţie. În (1) luăm $x=\dfrac{a_1}{a_2}$ şi obţinem:

$$\left(\frac{a_1^2+a_2^2}{2}\right)^n \geq (a_1a_2)^n+\frac{1}{2^n}\left(a_1^n-a_2^n\right)^2.$$

[1] Profesor, Colegiul Naţional ,,Aprily Lajos", Braşov

Scriind şi analoagele acesteia şi adunând cele m inegalităţi obţinute (convenim ca $a_{m+1} \equiv a_1$), deducem prima inegalitate din (2), iar cea de-a doua este evidentă.

Corolarul 1.2. *Dacă $a_k > 0$, $k = \overline{1,m}$, atunci au loc inegalităţile*

$$\sum_{k=1}^{m} a_k^2 \geq \sum_{ciclic} a_1 a_2 + \frac{1}{2} \sum_{ciclic} (a_1 - a_2)^2 \geq \sum_{ciclic} a_1 a_2, \tag{3}$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $a_1 = a_2 = \cdots = a_m$.

Observaţie. Evident, (3) reprezintă o generalizare şi o rafinare a inegalităţii clasice $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \geq a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1$.

Propoziţia 2. *Dacă $x, y > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ şi $f_n(x,y) = \dfrac{1}{n+1}(x^n + x^{n-1}y + \cdots + xy^{n-1} + y^n)$, atunci*

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^n \leq f_n(x,y) \leq \frac{x^n + y^n}{2}, \tag{4}$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $x = y$.

Demonstraţie. Procedăm prin inducţie completă atât pentru prima inegalitate din (4) cât şi pentru cea de-a doua.

Pentru $n = 1$ şi $n = 2$ se obţin inegalităţile adevărate $\dfrac{x+y}{2} \leq \dfrac{x+y}{2}$ şi $\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 \leq \dfrac{1}{3}(x^2 + xy + y^2)$ (echivalentă cu $(x-y)^2 \geq 0$). Presupunând că $\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n \leq f_n(x,y)$, vom arăta că inegalitatea are loc şi pentru $n+1$. Într-adevăr, deoarece

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^{n+1} \leq \left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \frac{1}{n+1}(x^n + x^{n-1}y + \cdots + xy^{n-1} + y^n),$$

este suficient să arătăm că

$$\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \frac{1}{n+1}(x^n + x^{n-1}y + \cdots + xy^{n-1} + y^n) \leq \frac{1}{n+2}(x^{n+1} + x^n y + \cdots + xy^n + y^{n+1}),$$

ceea ce revine la

$$2(x^n y + x^{n-1}y^2 + \cdots + xy^n) \leq n(x^{n+1} + y^{n+1}).$$

Această inegalitate rezultă observând mai întâi că $x^{n-k}y^{k+1} + x^{k+1}y^{n-k} \leq x^{n+1} + y^{n+1}$ (echivalentă cu inegalitatea evidentă $(x^{n-k} - y^{n-k})(x^{k+1} - y^{k+1}) \geq 0$), apoi scriind-o pe aceasta pentru $k = 0, 1, \cdots, n-1$ şi în final adunând inegalităţile obţinute. Aşadar, prima inegalitate din (4) este adevărată.

A doua inegalitate din (4) se verifică imediat pentru $n = 1$ şi $n = 2$; într-adevăr, avem: $\dfrac{x+y}{2} \leq \dfrac{x+y}{2}$ şi $\dfrac{1}{3}(x^2 + xy + y^2) \leq \dfrac{x^2 + y^2}{2}$ (echivalentă cu $(x-y)^2 \geq 0$). Să trecem la etapa inductivă. Presupunem că are are loc $f_n(x,y) \le \dfrac{x^n+y^n}{2}$. Avem:

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x,y) &= \frac{1}{n+2}\left[\frac{x\left(x^n+x^{n-1}y+\cdots+xy^{n-1}+y^n\right)}{n+1}(n+1)+y^{n+1}\right] \le \\ &\le \frac{1}{n+2}\left(x\frac{x^n+y^n}{2}(n+1)+y^{n+1}\right) = \\ &= \frac{(n+1)x^{n+1}+(n+1)xy^n+2y^{n+1}}{2(n+2)}. \end{aligned}$$

În acelaşi mod găsim şi inegalitatea

$$f_{n+1}(y,x) \le \frac{(n+1)y^{n+1}+(n+1)yx^n+2x^{n+1}}{2(n+2)}.$$

După adunarea lor, obţinem:

$$2f_{n+1}(x,y) \le \frac{(n+3)(x^{n+1}+y^{n+1})+(n+1)xy(x^{n-1}+y^{n-1})}{2(n+2)}.$$

Rămâne să arătăm că

$$\frac{(n+3)(x^{n+1}+y^{n+1})+(n+1)xy(x^{n-1}+y^{n-1})}{2(n+2)} \le x^{n+1}+y^{n+1},$$

care este echivalentă cu $xy(x^{n-1}+y^{n-1}) \le x^{n+1}+y^{n+1}$, deci cu $(x-y)(x^n-y^n) \ge 0$, care este adevărată. Propoziţia este complet demonstrată.

Corolarul 2.1. *Dacă* $a_k > 0$, $k=\overline{1,m}$, *atunci*

$$\sum_{k=1}^m a_k^n \ge \sum_{ciclic} f_n(a_1,a_2) \ge \sum_{ciclic}\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^n \ge \sum_{ciclic}(\sqrt{a_1a_2})^n, \tag{5}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, *cu egalitate dacă şi numai dacă* $a_1=a_2=\cdots=a_m$ (cu $a_{m+1}\equiv a_1$).

Demonstraţie. Observăm că

$$\sum_{k=1}^m a_k^2 \ge \sum_{ciclic}\frac{a_1^n+a_2^n}{2}$$

şi aplicăm Propoziţia 2.

Corolarul 2.2. *În aceleaşi condiţii, avem:*

$$\sum_{k=1}^m a_k^2 \ge \sum_{ciclic} f_2(a_1,a_2) \ge \sum_{ciclic}\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 \ge \sum_{ciclic} a_1a_2. \tag{6}$$

Observaţie. (6) oferă noi rafinari inegalităţii clasice $a_1^2+a_2^2+a_3^2 \ge a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1$.

Bibliografie

1. *Octogon Mathematical Magazine*, (1993-2012).