Cum putem folosi întregii algebrici în matematica elementară

Marian TETIVA[1]

Abstract. The paper brings some tools from advanced algebra (namely algebraic integers) in attention of those interested in elementary, but harder problems, like those involved in mathematical competitions. Yet, the author would like to try and open their eyes, so that they can see, beyond their immediate goals, the higher and greater mathematics which is expecting them to be explored, known, and understood.

Keywords: rational number, complex number, algebraic integer, symmetric polynomial.

MSC 2010: 97H99.

Este vorba, mai precis, de probleme care au un enunţ elementar, dar care se pot rezolva (uneori) numai recurgând la o noţiune pe care n-o prevăd programele matematicii şcolare; sau pentru care această noţiune (de întreg algebric) simplifcă mult soluţia. V-aţi întâlnit, pesemne, cu

Problema 1. *Să se arate că, dacă r este un număr raţional şi* $\cos(r\pi)$ *este, de asemenea, număr raţional, atunci* $\cos(r\pi)$ *poate fi doar* -1, $-1/2$, 0, $1/2$ *sau* 1.

Soluţie (a se vedea [**3**] sau [**4**]). Fie $r = m/n$, cu m şi n numere întregi şi $\zeta = \cos(r\pi) + i\sin(r\pi)$. Avem $2\cos(r\pi) = \zeta + \overline{\zeta}$ şi $\zeta^{2n} = 1$. Înseamnă că ζ şi $\overline{\zeta}$ sunt soluţii ale ecuaţiei $x^{2n} - 1 = 0$, deci sunt întregi algebrici; odată cu ele va fi întreg algebric si suma lor, adică $2\cos(r\pi)$. Pe de altă parte, ipoteza ne spune că $2\cos(r\pi)$ este număr raţional, iar un număr raţional care este şi întreg algebric este în mod necesar un întreg. Deci $2\cos(r\pi) \in \mathbb{Z} \cap [-2, 2]$, ceea ce conduce direct la concluzie.

Pentru cei interesaţi de mai mult în privinţa aceasta avem şi

Problema 2. *Pentru r număr raţional singurele valori posibile ale lui* $\cos(r\pi)$ *care sunt şi iraţionale pătratice (adică soluţii iraţionale ale unei ecuaţii de gradul al doilea cu coeficienţi raţionali) sunt* $\pm\sqrt{2}/2$, $\pm\sqrt{3}/2$ *şi* $(\pm 1 \pm \sqrt{5})/4$.

Puteţi găsi un material destul de elaborat la adresa `http://www.uni-math.gwdg.de/jahnel/Preprints/cos.pdf` pentru a afla mai multe despre aceste chestiuni. Noi vom dezvolta subiectul în altă direcţie.

Trebuie, bineînţeles, să începem prin a clarifica soluţia de mai sus: ne putem lămuri destul de repede, cu o definiţie şi două teoreme (ce-i drept, una dintre ele mai avansată, pentru care demonstraţia, eventual, se ocoleşte; aşa cum vom face şi noi) că nu e vorba de lucruri foarte grele. (Chiar dacă vom sări peste unele demonstraţii, o facem pentru a nu aglomera expunerea, iar nu pentru că ele ar fi inaccesibile.)

Definiţie. Un număr complex α se numeşte *întreg algebric* dacă este soluţie a unei ecuaţii algebrice cu coeficienţi întregi şi coeficientul termenului de grad maxim egal cu 1; altfel spus, dacă există numerele întregi a_0, a_1, ..., a_{n-1} astfel încât

$$\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0 = 0.$$

[1]Profesor, Colegiul Naţional ,,Gheorghe Roşca Codreanu", Bârlad

Teoremele sunt următoarele:

Teorema 1. *Dacă* α *şi* β *sunt întregi algebrici, atunci* $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$ *şi* $\alpha\beta$ *sunt, de asemenea, întregi algebrici.*

Aşadar, mulţimea întregilor algebrici are o structură de inel (mai precis este subinel al inelului numerelor complexe). Nu prezentăm aici demonstraţia acestei teoreme, nefiind spaţiu. Altminteri ea nu este aşa complicată (dar nici evidentă), poate fi înţeleasă de către un elev de liceu (din an terminal). Cei interesaţi pot consulta demonstraţia în [**3**].

Teorema 2. *Un număr raţional care este şi întreg algebric este întreg.*

Demonstraţie. Fie $\alpha = p/q$, cu p şi q numere întregi prime între ele, $q > 0$. Avem pentru α o egalitate ca în definiţia de mai sus, care ne conduce la

$$p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0$$

(cu $a_0, \ldots, a_{n-1}$ numere întregi); de aici vedem că q divide pe p^n. Dar q şi p^n sunt prime între ele (q şi p fiind astfel), deci $q = 1$ şi $\alpha = p \in \mathbb{Z}$.

Rezultatul acesta are sigur un aer cunoscut; chiar dacă acum e cuprins abia în programa clasei a XII-a, îl ştiţi, probabil, în următoarea formă mai generală:

Teorema $2'$. *Fie* $x = p/q$, *cu* p *şi* q *numere întregi prime între ele, o soluţie raţională a ecuaţiei algebrice cu coeficienţi întregi* $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 = 0$. *Atunci* p *divide pe* a_0 *şi* q *divide pe* a_n. *În particular, dacă* $a_n = 1$ *şi* $a_0 \in \{1, -1\}$, *singurele (eventuale) soluţii raţionale ale ecuaţiei sunt 1 sau* -1.

Cred că puteţi demonstra Teorema $2'$ şi cred că acum poate fi deplin înţeleasă rezolvarea Problemei 1!?

Şi, pentru că am pornit pe acest drum, daţi-mi voie să vă port spre o altă soluţie a Problemei 1, trecând iar printr-o teoremă "neelementară" (oare?). Ea se numeşte *teorema fundamentală a polinoamelor simetrice*, deci trebuie să mai dăm o

Definiţie. Un polinom în n nedeterminate $f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ se numeşte *simetric* dacă

$$f(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \ldots, X_{\sigma(n)}) = f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

oricare ar fi permutarea σ a mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$ (deci dacă este invariant la orice permutare a nedeterminatelor).

Se vorbeşte puţin despre polinoame simetrice în matematica de liceu (şi cred că e regretabil acest lucru); ceva în clasa a IX-a (când se fac sisteme de ecuaţii simetrice - doar cu două necunoscute, deci şi polinoamele implicate sunt cu două nedeterminate) şi apoi abia în clasa a XII-a când, pentru a da relaţiile între rădăcinile şi coeficienţii unei ecuaţii algebrice (relaţiile lui Viète) trebuie introduse polinoamele simetrice fundamentale în n nedeterminate, adică polinoamele

$$s_j = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_j\le n} X_{i_1}\cdots X_{i_j}, \ \ 1 \le j \le n;$$

s_j este, cu alte cuvinte, suma tuturor produselor de câte j nedeterminate ($s_1 = X_1 + \cdots + X_n$ este suma nederminatelor, $s_n = X_1 \cdots X_n$ este produsul lor şi aşa mai departe). Se mai învaţă atunci (consecutiv relaţiilor lui Viète) diverse exprimări cum ar fi $X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 = s_1^2 - 2s_2$, sau $X_1^2X_2^2 + X_1^2X_3^2 + X_2^2X_3^3 = s_2^2 - 2s_1s_3$ (aici e vorba de s_1, s_2, s_3 în trei variabile), etc. Enunţul următor arată că asemenea exprimări nu sunt deloc întâmplătoare.

Teorema 3 (*Teorema fundamentală a polinoamelor simetrice*). *Pentru orice polinom $f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ simetric în nedeterminatele $X_1, X_2, \ldots, X_n$ există un polinom $g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ astfel încât*

$$f(X_1, X_2, \ldots, X_n) = g(s_1, s_2, \ldots, s_n).$$

De exemplu, pentru $f = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$, avem pe $g = X_1^2 - 2X_2$. Nu intrăm nici în detaliile acestei demonstraţii, o puteţi găsi în orice curs de algebră superioară (de exemplu [**2**]).

Pentru noi e important doar să observăm că are loc următoarea

Consecinţă. *Fie f un polinom cu coeficienţi întregi şi $x_1, x_2, \ldots, x_k$ toate rădăcinile sale (în general complexe). Fie g un alt polinom cu coeficienţi întregi şi fie h polinomul definit prin*

$$h(X) = (X - g(x_1))(X - g(x_2)) \cdots (X - g(x_k)).$$

Atunci h are coeficienţi întregi (şi, evident, coeficientul termenului de grad maxim egal cu 1).

Folosiţi relaţiile lui Viète pentru polinomul f şi teorema fundamentală a polinoamelor simetrice pentru a justifica această consecinţă!

A doua soluţie a Problemei 1. Să începem tot prin a observa că, dacă $r = m/n$ (cu m şi n întregi), atunci $2\cos(r\pi) = 2\cos(m\pi/n) = \zeta^m + 1/\zeta^m$, unde $\zeta = \cos(\pi/n) + i\sin(\pi/n)$, deci $2\cos(m\pi/n)$ este rădăcină a polinomului

$$h = \prod_{j=0}^{2n-1}\left(X - \left(\zeta^j + \frac{1}{\zeta^j}\right)\right) = \prod_{j=0}^{2n-1}\left(X - \left(\zeta^j + (\zeta^j)^{2n-1}\right)\right)$$

care are coeficienţi întregi (conform consecinţei imediat mai sus menţionate a teoremei fundamentale a polinoamelor simetrice, nu?) şi coeficientul termenului de grad maxim egal cu 1. Termenul său liber

$$\prod_{j=0}^{2n-1}\left(\zeta^j + \frac{1}{\zeta^j}\right)$$

este, dacă îl presupunem pe n impar, egal cu -4 (verificaţi acest fapt! a se vedea şi [**4**]). Cum doi dintre factorii produsului sunt 2 şi -2 (pentru $j = 0$, respectiv $j = n$), rămâne

$$\prod_{j\in\{0,\ldots,2n-1\}\setminus\{0,n\}}\left(\zeta^j + \frac{1}{\zeta^j}\right) = 1$$

deci polinomul

$$\prod_{j\in\{0,\ldots,2n-1\}\setminus\{0,n\}}\left(X-\left(\zeta^j+\frac{1}{\zeta^j}\right)\right)$$

(obţinut prin împărţirea lui h la X^2-4; din algoritmul împărţirii vedem că are coeficienţi întregi şi coeficientul termenului de grad maxim egal cu 1) poate avea, pentru n impar, ca rădăcini raţionale doar pe 1 sau -1. Altfel spus, dacă numitorul lui r este impar şi $\cos(r\pi)$ este raţional, atunci $\cos(r\pi)\in\{0,\pm1/2,\pm1\}$ (de fapt 0 nu poate fi în acest caz).

Cazul când r are numitorul par se reduce la acesta, folosind formula $\cos 2x = 2\cos^2 x-1$ şi apelând, eventual, la o mică inducţie. Într-adevăr, dacă ştim $\cos(r\pi)\in\mathbb{Q}$, rezultă şi $\cos(2r\pi)=2\cos^2(r\pi)-1\in\mathbb{Q}$. Dacă $2r$ are numitorul impar, conform celor deja demonstrate, $\cos(2r\pi)$ poate fi doar 1, -1, $1/2$ sau $-1/2$ şi verificăm uşor că rezultă pentru $\cos(r\pi)=\pm\sqrt{(1+\cos(2r\pi))/2}$ (şi $\cos(r\pi)\in\mathbb{Q}$) doar una din valorile din mulţimea $\{0,\pm1/2,\pm1\}$. Dacă nu (dacă $2r$ încă are numitorul par), mergem la $\cos(4r\pi)$, care este, de asemenea, raţional şi aşa mai departe.

Problema 3. *Arătaţi că, dacă r şi $\tan(r\pi)$ sunt numere raţionale (astfel încât $2r$ să nu fie număr întreg impar), atunci $\tan(r\pi)\in\{-1,0,1\}$.*

Evident, provocarea aici este să găsiţi o soluţie directă, care nu se foloseşte de Problema 1 (dar asta numai pentru a exersa metoda; altminteri soluţia bazată pe rezultatul deja demonstrat este cea care se dă de obicei [**3**,**4**]). Se poate încerca o inducţie după numitorul lui r (atunci când acesta e scris ca fracţie ireductibilă cu numitor pozitiv) folosind faptul că $\tan(nr\pi)=0$ şi formula pentru $\tan(nx)$. Observaţi că Teorema $2'$ se aplică uşor dacă n (numitorul lui r) este prim.

Acum ne vom muta (aparent) în altă zonă cu

Problema 4. *Fie a, b şi c numere întregi nenule astfel încât*

$$u=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \text{ şi } v=\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$$

sunt, şi ele, numere întregi. Să se arate că $|a|=|b|=|c|$.

Soluţie. Parcă nu seamănă cu cele dinainte - dar se rezolvă în acelaşi cerc de idei. Am (re)întâlnit de curând problema pe forumul MathLinks (mulţumim!) şi cred că e unul din punctele de pornire ale acestei note, alături de dorinţa de a prezenta această metodă de rezolvare a unor probleme, mai ales pentru că deschide ferestre către matematica mai înaltă (şi, dacă vă place matematica, *trebuie* să priviţi prin asemenea ferestre). Probabil că deja v-aţi dat seama cum stăm: numerele $x_1=a/b$, $x_2=b/c$ şi $x_3=c/a$ sunt raţionale şi rădăcini ale polinomului (cu coeficienţi întregi şi coeficientul termenului de grad maxim egal cu 1)

$$(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)=X^3-uX^2+vX-1$$

(căci $x_1+x_2+x_3=u$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=v$ şi $x_1x_2x_3=1$; iar întâlnim relaţiile lui Viète). Orice rădăcină raţională a sa este, deci, 1 sau -1, de unde concluzia decurge imediat.

Iată, ca de obicei, încă nişte probleme pentru dumneavoastră. Prima o să vi se pară, poate, o glumă - dar gândiţi-vă că n-aţi fi ştiut Problema 4 (altfel se văd lucrurile, nu?). La fel putem spune despre cea de-a doua problemă propusă, dacă ştim Problema 1.

Problema 5. *Fie a, b, c şi d numere întregi nenule astfel încât*

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{c}{d}+\frac{d}{c} \text{ şi } \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{d}+\frac{d}{c}\right)$$

sunt numere întregi. Să se arate că $|a| = |b|$ şi $|c| = |d|$.

Problema 6. *Fie r şi q numere raţionale astfel încât $\alpha = \cos r\pi + \cos q\pi$ este număr raţional. Să se arate că $\alpha \in \{-2, -3/2, -1, -1/2, 0, 1/2, 1, 3/2, 2\}$. Puteţi extinde pentru o sumă de trei (patru, etc) cosinusuri?*

Problema 7. *Fie s, m şi n numere întregi, $s > 0$ şi n impar. Să se arate că, dacă $(\cos(m/n)\pi)^s$ este număr raţional, atunci $(\cos(m/n)\pi)^s \in \{\pm 1, \pm 1/2^s\}$.*

Problema 8 (**Marius Cavachi** [**1**]). *Fie n un număr natural mai mare ca 1 şi diferit de 4. Fie p şi q numere întregi pozitive mai mici decât n şi prime cu n. Fie $a = \dfrac{\cos(2\pi p/n)}{\cos(2\pi q/n)}$. Să se arate că, dacă a^k este rational pentru un întreg pozitiv k, atunci a^k este egal ori cu 1, ori cu -1.*

Bibliografie

1. **M. Cavachi** – *Problem 11540*, The American Mathematical Monthly, 10/2010, p. 929.
2. **I. D. Ion, N. Radu** – *Algebra,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1991.
3. **M. Ţena** – *Întregi algebrici şi aplicaţii* în *Zece lecţii alese de matematică elementară,* Societatea de Ştiinţe Matematice din România, 1998.
4. **M. Ţena** – *Rădăcinile unităţii,* Societatea de Ştiinţe Matematice din România, 2005.

Recreaţii ... matematice

1. Diagonale şi triunghiuri. *Completaţi tabelul de mai jos cu cel puţin două coloane:*

n	3	4	5	...
d	0	2	5	...
t	1	8	31	...

unde n = numărul laturilor unui poligon, d = numărul diagonalelor sale şi t = numărul triunghiurilor formate de laturile şi diagonalele sale.

2. *Ce literă urmează în şirul $U, I, I, U, I, E, E, T, \ldots$?*

Lucian Tuţescu, Craiova

(Răspunsuri la pag. 105)