Conexiuni cu cercul celor şase puncte

Constantin DRAGOMIR[1]

Abstract. A problem proposed at the OIM, Madrid 2008, is generalized in this Note by substituting the circumcenter and the orthocenter of a triangle for two arbitrary isogonal conjugate points.

Keywords: orthocenter, circumcenter, isogonal conjugate points.

MSC 2010: 51M04.

Punctul de plecare al acestei note este următoarea problemă, propusă de delegaţia Rusiei la a 49-a **Olimpiadă Internaţională de Matematică**, *Madrid*, 2008 [**2**,p.352]:

Într-un triunghi ascuţitunghic ABC se notează cu H ortocentrul său. Cercul cu centrul în mijlocul segmentului BC şi care trece prin H intersectează dreapta BC în punctele A_1 şi A_2. Analog, cercul cu centrul în mijlocul segmentului CA şi care trece prin H intersectează dreapta CA în punctele B_1 şi B_2, iar cercul cu centrul în mijlocul segmentului AB şi care trece prin H intersectează dreapta AB în punctele C_1 şi C_2. Arătaţi că punctele $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ sunt conciclice.

După cum se ştie, *cercul lui Euler* (*cercul celor nouă puncte*) este cercul circumscris triunghiurilor podare ale punctelor O şi H, centrul său fiind mijlocul segmentului OH. Se mai ştie că punctele O şi H sunt izogonale.

O generalizare, utilă în cele ce urmează, este dată de

Propoziţia 1 [**1**; 5.16, p.57]. *Proiecţiile a două puncte izogonale P şi Q pe laturile unui triunghi sunt şase puncte conciclice, iar cercul acestor proiecţii are centrul în mijlocul segmentului PQ (cercul celor şase puncte).*

Se observă că în problema de olimpiadă enunţată mai sus apar punctele H şi O (prin mijloacele laturilor), dar nu în mod simetric.

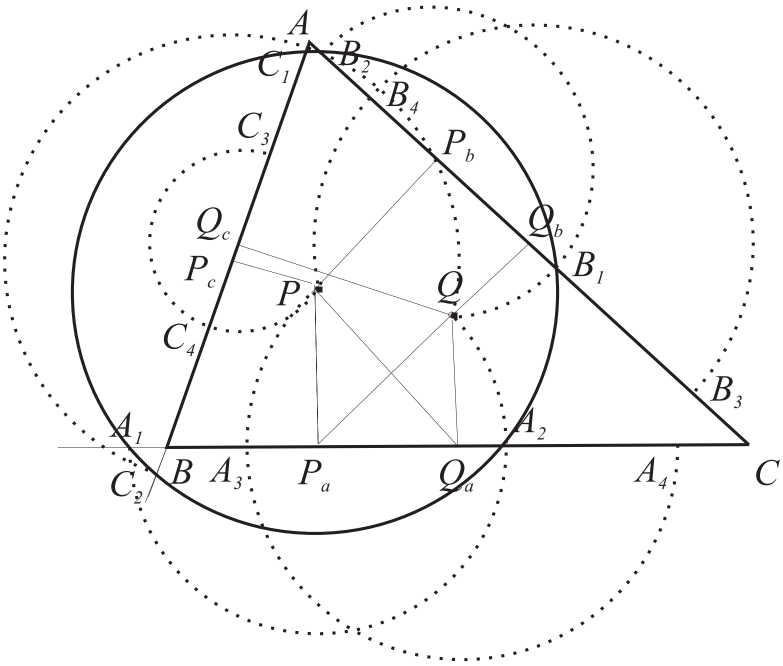
Propunem o generalizare a problemei – de felul trecerii de la cercul lui Euler la cercul celor şase puncte – şi o restabilire a simetriei în

Propoziţia 2. *În triunghiul ABC se consideră două puncte izogonale P şi Q şi se notează cu P_a, P_b, P_c şi respectiv Q_a, Q_b, Q_c proiecţiile lor pe dreptele BC, CA şi AB. Cercurile $\mathcal{C}(P_a, P_aQ)$, $\mathcal{C}(P_b, P_bQ)$ şi $\mathcal{C}(P_c, P_cQ)$ intersectează BC, CA, respectiv AB în perechile de puncte A_1 şi A_2, B_1 şi B_2, respectiv C_1 şi C_2, iar cercurile $\mathcal{C}(Q_a, Q_aP)$, $\mathcal{C}(Q_b, Q_bP)$ şi $\mathcal{C}(Q_c, Q_cP)$ intersectează BC, CA, respectiv AB în perechile de puncte A_3 şi A_4, B_3 şi B_4, respectiv C_3 şi C_4.*

Arătaţi că punctele $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ sunt conciclice, iar cercul acestor puncte are centrul în P şi că punctele $A_3, A_4, B_3, B_4, C_3, C_4$ sunt conciclice şi situate pe un cerc de centrul Q şi de aceeaşi rază.

Demonstraţie. Fie q lungimea segmentului PQ şi M mijlocul său. Conform Propoziţiei 1, punctele $P_a, P_b, P_c, Q_a, Q_b, Q_c$ se află pe cercul cu centrul M şi rază r_M dată de

(1) $$r_M = MP_a = MP_b = MP_c = MQ_a = MQ_b = MQ_c.$$



Vom exprima prin r_M şi q distanţele punctului P la punctele $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$. În acest scop, observăm că $PA_1 = PA_2$ (P situat pe mediatoarea segmentului A_1A_2) şi că $PA_1^2 = PP_a^2 + P_aA_1^2$ ($\triangle PP_aA_1$ dreptunghic). Cum $P_aA_1 = P_aQ$, avem

$$PA_1^2 = PA_2^2 = PP_a^2 + P_aQ^2. \tag{2}$$

Aplicând teorema medianei în $\triangle PP_aQ$, obţinem

$$PP_a^2 + P_aQ^2 = 2MP_a^2 + \frac{1}{2}PQ^2 = 2r_M^2 + \frac{1}{2}q^2. \tag{3}$$

Din (2) şi (3) rezultă că

$$PA_1 = PA_2 = \sqrt{2r_M^2 + \frac{1}{2}q^2}. \tag{4}$$

Analog, avem $QA_3 = QA_4$ şi $QA_3^2 = QQ_a^2 + Q_aA_3^2 = QQ_a^2 + Q_aP^2 = 2MQ_a^2 + \frac{1}{2}PQ^2 = 2r_M^2 + \frac{1}{2}q^2$; ca urmare,

$$QA_3 = QA_4 = \sqrt{2r_M^2 + \frac{1}{2}q^2}. \tag{5}$$

[1]Profesor, Liceul ,,Ion Barbu", Piteşti

Aşadar, combinând (4) cu (5), pentru punctele de pe BC obţinem relaţiile:

$$PA_1 = PA_2 = QA_3 = QA_4 = \sqrt{2r_M^2 + \frac{1}{2}q^2}. \tag{7}$$

Procedând la fel, pentru punctele de pe CA şi cele de pe AB se obţin relaţiile asemănătoare:

$$PB_1 = PB_2 = QB_3 = QB_4 = \sqrt{2r_M^2 + \frac{1}{2}q^2}, \tag{8}$$

$$PC_1 = PC_2 = QC_3 = QC_4 = \sqrt{2r_M^2 + \frac{1}{2}q^2}. \tag{9}$$

Relaţiile (7), (8) şi (9) arată că punctele $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ se găsesc pe cercul de centru P şi rază $\sqrt{2r_M^2 + \frac{1}{2}q^2}$, iar punctele $A_3, A_4, B_3, B_4, C_3, C_4$ se găsesc pe cercul de centru Q şi aceeaşi rază. Propoziţia este complet demonstrată.

Observaţii. 1) Se consideră că punctele izogonale P, Q nu se află pe dreptele AB, BC, CA. Aşa cum se observă în [**2**], restricţia ca $\triangle ABC$ să fie ascuţitunghic nu este necesară.

2) Problema dată la olimpiadă revine la cazul în care P, Q sunt punctele H, O şi se are în vedere doar cercul $\mathcal{C}(O, \sqrt{r_\omega^2 + \frac{1}{2}HO^2})$, unde r_ω este raza cercului lui Euler.

Bibliografie

1. T. Lalescu - *Geometria triunghiului,* Ed. Tineretului, Bucureşti, 1958.

2. *Gazeta Matematică (B)*, nr. 7-8/2008, p. 352.

Recreaţii ... matematice

(Răspunsuri la ,,recreaţiile" de la pag. 102)

1. Formulele de calcul pentru d şi t sunt:

$$d = \frac{n(n-3)}{2}, \quad t = 3n^3 - 28n^2 + 92n - 104.$$

Tabelul completat cu încă trei coloane este:

n	3	4	5	6	7	8	...
d	0	2	5	9	14	20	...
t	1	8	31	88	197	376	...

2. Este vorba de şirul ultimelor litere (cele subliniate) ale cuvintelor din şirul UN<u>U</u>, DO<u>I</u>, TRE<u>I</u>, PATR<u>U</u>, CINC<u>I</u>, ŞAS<u>E</u>, ŞAPT<u>E</u>, OP<u>T</u>, NOU<u>Ă</u>, ...

Aşadar, în şirul dat urmează litera Ă.

Observaţie. Această ,,recreaţie" este o replică la şirul $U, D, T, P, C, \ldots$ (publicat în *G.M.-9/2002, Problema 31, p.348*) format cu primele litere ale cuvintelor din şirul de mai sus, şir în care trebuie continuat cu litera Ş.