Câteva inegalităţi geometrice în poligoane convexe şi nu numai

Dumitru M. BĂTINEŢU-GIURGIU [1], ***Neculai STANCIU*** [2]

Abstract. In this article we present some algebraic inequalities and some of their applications for general convex polygons, and tetrahedrons.

Keywords: Bergström′s inequality, Jensen′s inequality, convex polygon.

MSC 2010: 51Mxx, 26D15.

Scopul acestui articol este de a stabili unele inegalităţi algebrice pe baza cărora vom obţine câteva inegalităţi geometrice în poligoane convexe, altele decât cele din [**1**].

Teorema 1. *Dacă* $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}, a, b, c, d, x_k, y_k, u_k, v_k \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall k = \overline{1,n}$, $m, q \in \mathbb{R}_+$, $X_n = \sum\limits_{k=1}^n x_k$, $Y_n = \sum\limits_{k=1}^n y_k$, $U_n = \sum\limits_{k=1}^n u_k$, $V_n = \sum\limits_{k=1}^n v_j$, *astfel încât* $cU_n > d \max\limits_{1 \le k \le n} u_k$, $mV_n \ge q \max\limits_{1 \le k \le n} v_k$, *atunci:*

$$\sum_{k=1}^n \frac{ax_k^2 + by_k^2}{cU_n - du_k + mV_n - qv_k} \ge \frac{aX_n^2 + bY_n^2}{(cn-d)U_n + (mn-q)V_n} \ge$$

(1)
$$\ge \frac{1}{a+b} \cdot \frac{(aX_n + bY_n)^2}{(cn-d)U_n + (mn-q)V_n} \ge \frac{4ab}{a+b} \cdot \frac{X_n Y_n}{(cn-d)U_n + (mn-q)V_n}.$$

Demonstraţia 1. Conform *inegalităţii lui Bergström* avem:

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{cU_n - du_k + mV_n - qv_k} \ge \frac{(\sum\limits_{k=1}^n x_k)^2}{\sum\limits_{k=1}^n (cU_n - du_k + mV_n - qv_k)} =$$

(2)
$$= \frac{X_n^2}{(cn-d)U_n + (mn-q)V_n}$$

şi analog

(3)
$$\sum_{k=1}^n \frac{y_k^2}{cU_n - du_k + mV_n - qv_k} \ge \frac{Y_n^2}{(cn-d)U_n + (mn-q)V_n}.$$

Din (2) şi (3) obţinem:

(4)
$$\sum_{k=1}^n \frac{ax_k^2 + by_k^2}{cU_n - du_k + mV_n - qv_k} \ge \frac{aX_n^2 - bY_n^2}{(cn-d)U_n + (mn-q)V_n}.$$

[1] Profesor, Colegiul Naţional ,,Matei Basarab”, Bucureşti

[2] Profesor, Şcoala Generală ,,George Emil Palade”, Buzău

Deoarece funcţia $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, $f(t) = t^2$ este convexă pe $\mathbb{R}_+^*$, conform *inegalităţii lui Jensen* obţinem:

$$\frac{a}{a+b}f(t_1) + \frac{b}{a+b}f(t_2) \geq \left(\frac{at_1 + bt_2}{a+b}\right), \ \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+^*. \tag{5}$$

Dacă în (5) luăm $t_1 = X_n$, $t_2 = Y_n$ obţinem că

$$\frac{aX_n^2 + bY_n^2}{a+b} \geq \frac{(aX_n - bY_n)^2}{(a+b)^2} \Leftrightarrow aX_n^2 + bY_n^2 \geq \frac{(aX_n + bY_n)^2}{a+b}. \tag{6}$$

Din (4) şi (6) deducem că

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{ax_k^2 + y_k^2}{cU_n - du_k + mV_n - qv_k} &\geq \frac{aX_n^2 + bY_n^2}{(cn-d)U_n + (mn-q)V_n} \geq \\ &\geq \frac{1}{a+b} \cdot \frac{(aX_n + bY_n)^2}{(cn-d)U_n + (mn-q)V_n}. \end{aligned} \tag{7}$$

Conform inegalităţii dintre media aritmetică şi media geometrică avem:

$$aX_n + bY_n \geq 2\sqrt{abX_nY_n}. \tag{8}$$

Din relaţiile (7) şi (8) deducem relaţiile (1), ceea ce demonstrează teorema.

Demonstraţia 2. Datorită convexităţii funcţiei $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, $f(t) = t^2$ pe $\mathbb{R}_+^*$, conform inegalitaăţii lui Jensen, rezultă inegalitatea (5) şi atunci avem:

$$\frac{a}{a+b}x_k^2 + \frac{b}{a+b}y_k^2 \geq \frac{(ax_k + by_k)^2}{(a+b)^2} \Leftrightarrow ax_k^2 + by_k^2 \geq \frac{1}{a+b}(ax_k + by_k)^2, \ \ \forall k = \overline{1,n}. \tag{9}$$

Conform inegalităţilor (9) avem:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{ax_k^2 + by_k^2}{cU_n - du_k + mV_n - qv_k} \geq \frac{1}{a+b} \sum_{k=1}^{n} \frac{(ax - k + by_k)^2}{cU_n - du_k + mV_n - qv_k},$$

unde aplicăm inegalitatea lui H. Bergström, iar apoi inegalitatea dintre media aritmetică şi media geometrică şi obţinem inegalităţile (1).

Comentariu 1.1. În prima demonstraţie am aplicat mai întâi inegalitatea lui H. Bergström şi apoi inegalitatea lui Jensen pe când în a doua demonstraţie am aplicat întâi inegalitatea lui Jensen şi apoi inegalitatea lui H. Bergström.

Fie $A_1A_2 \ldots A_n$, $n \geq 3$ un poligon convex şi $P \in \operatorname{Int} A_1A_2 \ldots A_n$. Notăm: $x_k = x_k(P) = PA_k$, d_k distanţa de la P la dreapta A_kA_{k+1}, $a_k = A_kA_{k+1}$, B_k piciorul bisectoarei interioare a unghiului $\angle A_kPA_{k+1}$ în triunghiul A_kPA_{k+1}, P_k mijlocul segmentului $[A_kA_{k+1}]$, $m_k = PP_k$ şi $w_k = PB_k$, unde $k = \overline{1,n}$ şi $A_{n+1} \equiv A_1$. De asemenea notăm: $X_n = X_n(P) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$, $D_n = D_n(P) = \sum\limits_{k=1}^{n} d_k$, $M_n = M_n(P) = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k$, $W_n = W_n(P) = \sum\limits_{k=1}^{n} w_k$ şi cu $2p$ perimetrul poligonului.

Teorema 2. *Dacă $A_1A_2\dots A_n$, $n \geq 3$, este un poligon convex, P un punct interior poligonului, $a,b,c,d \in \mathbb{R}_+^*$, $m,q \in \mathbb{R}_+$ astfel încât $cW_n > d \max\limits_{1\leq k\leq n} w_k$, $mD_n \geq q \max\limits_{q\leq k\leq n} d_k$, atunci:*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{ax_k^2 + bd_k^2}{cW_n + mD_n - dw_k - qd_k} \geq \frac{4ab}{a+b} \cdot \frac{D_n^2 \sec^2 \cdot \frac{\pi}{n}}{((c+m)n - (d+q))X_n}. \tag{10}$$

Demonstraţie. Dacă în relaţiile (1) luăm $y_k = d_k$, $u_k = w_k$, $v_k = d_k$, $\forall k = \overline{1,n}$, atunci obţinem:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{ax_k^2 + bd_k^2}{cW_n - dw_k + mD_n - qd_k} \geq \frac{aX_n^2 + bD_n^2}{(cn-d)W_n + (mn-q)D_n} \geq$$

$$\geq \frac{1}{a+b} \cdot \frac{(aX_n + bD_n)^2}{(cn-d)W_n + (mn-q)D_n} \geq \frac{4ab}{a+b} \cdot \frac{X_n D_n}{(cn-d)W_n + (mn-q)D_n}. \tag{11}$$

Conform [**2**], **H.C. Lenhard** a demonstrat că

$$W_n = \sum_{k=1}^{n} w_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \cos\frac{\pi}{n} = X_n \cos\frac{\pi}{n}. \tag{12}$$

Datorită faptului că $d_k \leq w_k$ în orice triunghi A_kPA_{k+1}, $\forall k = \overline{1,n}$ rezultă că

$$D_n = \sum_{k=1}^{n} d_k \leq W_n \leq X_n \cos\frac{\pi}{n}. \tag{13}$$

Inegalitatea (13) este inegalitatea lui **L. Fejes Töth** (a se vedea [**3**]).

Dacă ţinem seama de relaţiile (12) şi (13), atunci din (11) rezultă ceea ce trebuia demonstrat.

Comentariu 2.1. Alegând în Teorema 1 $x_k, y_k, u_k, v_k \in \{x_k, w_k, d_k\}$, unde $k = \overline{1,n}$, în diverse moduri se pot obţine inegalităţi de tipul (10). De exemplu, dacă $x_k = x_k$, $y_k = w_k$, $u_k = d_k$, $v_k = x_k$, $\forall k = \overline{1,n}$, atunci obţinem că

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{ax_k^2 + bw_k^2}{cD_n - dd_k + mX_n - qx_k} \geq \frac{4ab}{a+b} \cdot \frac{X_n W_n}{(cn-d)D_n + (mn-q)X_n} \geq$$

$$\geq \frac{4ab}{a+b} \cdot \frac{W_n^2 sec^2 \frac{\pi}{n}}{\left((cn-d)\cos\frac{\pi}{n} + mn - q\right) X_n}. \tag{14}$$

Observaţia 2.1. Dacă $m = q = 0$, atunci din relaţia (11) obţinem că

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{ax_k^2 + bd_k^2}{cW_n - dw_k} \geq \frac{aX_n^2 + bD_n^2}{(cn-d)W_n} \geq \frac{4ab}{a+b} \cdot \frac{X_n D_n}{(cn-d)W_n} \geq$$

$$\geq \frac{4abD_n^2 sec^2 \frac{\pi}{n}}{(a+b)(cn-d)X_n \cos\frac{\pi}{n}} = \frac{4abD_n^2 sec^2 \frac{\pi}{n}}{(a+b)(cn-d)X_n}. \tag{15}$$

Observaţia 2.2. Dacă poligonul este un triunghi $A_1A_2A_3$, atunci relaţiile (13) şi (14) devin:

$$W_3 = \sum_{k=1}^{3} w_k \leq X_3 \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}X_3 \tag{16}$$

şi respectiv

$$D_3 = d_1 + d_2 + d_3 \leq \frac{1}{2}X_3 \Leftrightarrow 2(d_1 + d_2 + d_3) \leq x_1 + x_2 + x_3, \tag{17}$$

unde relaţia (17) este *inegalitatea Erdös-Mordell.*

În acest mod obţinem din relaţiile (10) şi (14):

$$\begin{aligned} &\frac{ax_1^2+bd_1^2}{cW_3+mD_3 - dw_1-qd_1}+\frac{ax_2^2 + bd_2^2}{cW_3 + mD_3 - dw_2 - qd_2}+\frac{ax_3^2 + bd_3^2}{cW_3 + mD_3 - dw_3 - qd_3}\geq \\ &\geq \frac{4ab}{a+b} \cdot \frac{D_3^2 sec^2\frac{\pi}{3}}{(3(c+m) - (d+q))X_3} = \frac{16abD_3^2}{(3(c+m) - (d+q))X_3}, \end{aligned} \tag{18}$$

şi respectiv

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{3} \frac{ax_k^2 + bw_k^2}{cD_n + mX_n - dd_k - qx_k} &\geq \frac{4ab}{a+b} \cdot \frac{W_3^2 sec\frac{\pi}{3}}{\left((3c-d)\cos\frac{\pi}{3} + (3m-q)\right)X_3} = \\ &= \frac{16abW_3^2}{(3(c+2m) - (d+2q))X_3}. \end{aligned} \tag{19}$$

Fie un paralelipiped dreptunghic de dimensiuni $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$ şi diagonală $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, iar $[ABCD]$ un tetraedru tridreptunghic în A. Notăm cu S_A aria feţei opuse vârfului A, iar cu S_B, S_C şi S_D analoagele lui S_A. Din relaţiile (1) obţinem că

$$\begin{aligned} &\frac{ax^4 + bS_B^4}{c\delta^2 + mS_A^2 - dx^2 - qS_B^2} + \frac{ay^4 + bS_c^4}{c\delta^2 + mS_A^2 - dy^2 - qS_C^2}+ \\ &+ \frac{az^2 + bS_D^2}{c\delta^2 + mS_A^2 - dz^2 - qS_D^2} \geq \frac{a\delta^4 + bS_A^4}{(3c-d)\delta^2 + (3m-\delta)S_A^2} \geq \\ &\geq \frac{1}{a+b} \cdot \frac{(a\delta^2 + bS_A^2)^2}{(3c-d)\delta^2 + (3m-q)S_A^2} \geq \frac{4ab}{a+b} \cdot \frac{\delta^2 S_A^2}{(3c-d)\delta^2 + (3m-q)S_4^2}, \end{aligned} \tag{20}$$

unde am ţinut seama că $\delta^2 = x^2 + y^2 + z^2$ şi că $S_A^2 = S_B^2 + S_C^2 + S_D^2$.

Fie $[ABCD]$ un tetraedru oarecare şi $h_a, h_b, h_c, h_d, r_a, r_b, r_c$ şi r_d, lungimile înălţimilor tetraedrului şi respectiv razele sferelor exînscrise tetraedrului. Dacă r este raza sferei înscrise în tetraedrul considerat, atunci se ştie că

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_d} = \frac{1}{r} \quad \text{şi} \quad \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} + \frac{1}{r_d} = \frac{2}{r}.$$

Teorema 3. *Dacă* $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+^*$, $m, q \in \mathbb{R}_+$, *astfel încât* $\dfrac{2c}{r} > d \max \dfrac{1}{r_a}$ *şi* $\dfrac{m}{r} \geq q \max h_a$, *atunci*:

$$\sum_{ciclic} \frac{a\frac{1}{r_a^2} + b\frac{1}{h_a^2}}{(2c+m)\frac{1}{r} - d\frac{1}{r_a} - q\frac{1}{h_a}} \geq \frac{4a+b}{(8c+4m-2d-q)r} \geq \tag{21}$$

$$\geq \frac{1}{a+b} \cdot \frac{(2a+b)^2}{(8c+4m-2d-q)r} \geq \frac{8ab}{a+b} \cdot \frac{1}{(8c+4m-2d-q)r}.$$

Demonstraţie. Pentru $n = 4$ din Teorema 1 obţinem:

$$\sum_{k=1}^{4} \frac{ax_k^2 + by_k^2}{cU_4 - du_k + mV_4 - qv_k} \geq \frac{aX_4^2 + bY_4^2}{(4c-d)U_4 + (4m-q)V_4} \geq$$

$$\geq \frac{1}{a+b} \cdot \frac{(aX_4 + bY_4)^2}{(4c-d)U_4 + (4m-q)V_4} \geq \frac{4ab}{a+b} \cdot \frac{X_4 Y_4}{(4c-d)U_4 + (4m-q)V_4},$$

în care luăm $X_4 = \sum \dfrac{1}{r_a} = \dfrac{2}{r}$, $Y_4 = \sum \dfrac{1}{h_a}$, $U_4 = \sum \dfrac{1}{r_a} = \dfrac{2}{r}$ şi $V_4 = \sum \dfrac{1}{h_a}$ şi obţinem concluzia.

Bibliografie

1. **D.M. Bătineţu-Giurgiu, N. Stanciu** – *Inegalităţi geometrice în poligoane convexe, de tip Bergström-Mitrinovič*, Recreaţii Matematice, 2/2011, 112-115.
2. **H.C. Lenhard** – *Verallgemeinerung und Verschärfung der Erdös-Mordellschen Ungleichung für Polygone*, Arh. Math. Vol XII (1961), 311-314.
3. **N. Minculete, A. Gobej** – *Inegalităţi geometrice de tipul Erdös-Mordell într-un poligon convex*, Gazeta Matematică - seria A, nr. 1-2/2010, 1-8.

Recreaţii ... matematice

Scrieţi fiecare dintre numerele **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10** utilizând numai *două cifre de 7, operaţii aritmetice şi diverse funcţii.*

Un model care face apel la funcţiile $x \longrightarrow \sqrt{x}, x \in \mathbb{R}_+$, şi $x \longrightarrow [x], x \in \mathbb{R}$, este:

$1 = 7 : 7,$
$2 = \left[\sqrt{7{,}7}\right],$
$3 = \left[\sqrt{7+7}\right],$
$4 = \left[\sqrt{7} + \sqrt{7}\right],$

$5 = \left[\sqrt{7}\right] - \left[-\sqrt{7}\right],$
$6 = -\left[-\sqrt{7}\right] - \left[-\sqrt{7}\right],$
$7 = \sqrt{7 \cdot 7},$

$8 = \left[\sqrt{77}\right],$
$9 = 7 + \left[\sqrt{7}\right],$
$10 = 7 - \left[-\sqrt{7}\right].$

Titu ZVONARU