ARTICOLE ŞI NOTE

Mulţimi de puterea continuului în spaţii euclidiene

Temistocle BÎRSAN [1]

Abstract. The aim of this Note consists in estabilishing, in an elementary and constructive way, that certain usual sets in $\mathbb{R}$ or $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ have the power of continuum; the bijections $f : A \to \mathbb{R}$ that are employed belong to the mathematical folklore.

Keywords: bijection, cardinal number, power of continuum.

MSC 2010: 97E60.

1. Introducere. Creatorul teoriei mulţimilor este **Georg Cantor** (1845-1918), care a fundamentat şi dezvoltat această teorie într-un număr de memorii publicate la sfârşitul sec. al XIX-lea. El utilizează conceptul de *funcţie bijectivă* (*Corespondenţă biunivocă* sau *unu-unu*) pentru a opera o ierarhizare a mulţimilor infinite. Introduce noţiunile de *număr cardinal* şi *număr ordinal* şi construieşte o aritmetică a acestora. Importanţa lucrărilor lui G. Cantor a fost recunoscută în secolul următor, iar teoria mulţimilor pătrunde în toate ramurile matematicii şi în învăţământul general începând cu treptele sale inferioare.

Se spune că o mulţime A din $\mathbb{R}^n$ este *numărabilă* dacă există o bijecţie între A şi $\mathbb{N}$ şi că este de *puterea continuului* dacă există o bijecţie între A şi $\mathbb{R}$. În al doilea caz, se mai spune că mulţimea A are *cardinalul* $\mathfrak{c}$ şi se notează card $A = \mathfrak{c}$.

În cele ce urmează, ne vom limita la câteva considerente asupra mulţimilor de puterea continuului, care au tangenţă cu preocupările elevilor şi profesorilor. Mai precis, vom arăta că anumite mulţimi ,,uzuale" din $\mathbb{R}$ şi $\mathbb{R}^n$ au puterea continuului indicând câte o funcţie reală bijectivă definită pe fiecare dintre ele (şi evitând modalităţile neconstructiviste).

2. Cardinalul intervalelor lui $\mathbb{R}$. Amintim că intervalele proprii ale lui $\mathbb{R}$ sunt: 1) *mărginite*: $(a, b), (a, b], [a, b)$ şi $[a, b]$; 2) *nemărginite*: $(a, +\infty)$, $(-\infty, a)$, $[a, +\infty)$ şi $(-\infty, a]$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Vom arăta că au cardinalul $\mathfrak{c}$ construind o bijecţie între un astfel de interval (indiferent de ce tip ar fi!) şi $\mathbb{R}$.

Să observăm mai întâi că funcţia liniară $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\varphi(t) = \frac{1}{b-a}(t-a), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

transformă intervalele $(a, b), (a, b]$, $[a, b)$ şi $[a, b]$ în $(0, 1)$, $(0, 1]$, $[0, 1)$ şi, respectiv, $[0, 1]$, iar translaţia $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\psi(t) = t - a, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

transformă semidreptele $(a, +\infty)$, $(-\infty, a)$, $[a, +\infty)$ şi $(-\infty, a]$ în $(0, +\infty)$, $(-\infty, 0)$, $[0, +\infty)$ şi, respectiv, $(-\infty, 0]$.

Propoziţia 1. *Următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

[1]Prof. dr., Univ. Tehnică ,,Gh. Asachi", Iaşi

1) *intervalele* $(0,1),(0,1],[0,1)$ *şi* $[0,1]$ *au cardinalul* $\mathfrak{c}$*;*

2) *pentru orice* $a,b\in\mathbb{R}$*,* $a<b$*, intervalele* (a,b)*,* $(a,b],[a,b)$ *şi* $[a,b]$ *au cardinalul* $\mathfrak{c}$.

Demonstraţie. 1) *Soluţia I.* Evident, funcţia $f_1:(0,1)\to\mathbb{R}$ definită prin

$$f_1(x)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}(2x-1),\quad \forall x\in(0,1) \tag{3}$$

(obţinută ,,aranjând" $\operatorname{tg}:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$) este bijectivă; deci card $(0,1)=\mathfrak{c}$.

Introducând mulţimea $A=(0,1)-\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots\right\}$, putem scrie egalităţile:

$$(0,1]=A\cup\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots\right\},\quad [0,1)=A\cup\left\{0,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots\right\},\quad [0,1]=A\cup\left\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots\right\}.$$

Se constată imediat că funcţiile $f_2:(0,1]\to(0,1)$, $f_3:[0,1)\to(0,1)$, $f_4:[0,1]\to(0,1)$ definite, respectiv, prin

$$f_2(x)=\begin{cases} x, & x\in A\\ \dfrac{1}{k+1}, & x=\dfrac{1}{k},\quad k\in\mathbb{N}^*,\end{cases} \tag{4}$$

$$f_3(x)=\begin{cases} x, & x\in A\\ \dfrac{1}{2}, & x=0\\ \dfrac{1}{k+1}, & x=\dfrac{1}{k},\quad k\in\{2,3,\ldots\},\end{cases} \tag{5}$$

$$f_4(x)=\begin{cases} x, & x\in A\\ \dfrac{1}{2}, & x=0,\\ \dfrac{1}{3}, & x=1\\ \dfrac{1}{k+2}, & x=\dfrac{1}{k},\quad k\in\{2,3,\ldots\}\end{cases} \tag{6}$$

sunt bijective; ca urmare, $\operatorname{card}(0,1]=\operatorname{card}[0,1)=\operatorname{card}\,[0,1]=\mathfrak{c}$.

Soluţia II. Vom construi în alt mod o bijecţie $f_2':(0,1]\to(0,1)$. Considerăm şirul $\left(\frac{1}{2^k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ care tinde la 0 (sau oricare alt şir strict descrescător la 0). Avem:

$$(0,1]=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k},\frac{1}{2^{k-1}}\right]\ \text{şi}\ (0,1)=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2^k},\frac{1}{2^{k-1}}\right).$$

Se verifică uşor că funcţia $f_k:\left(\frac{1}{2^k},\frac{1}{2^{k-1}}\right]\to\left[\frac{1}{2^k},\frac{1}{2^{k-1}}\right)$ definită prin $f_k(x)=\frac{3}{2^k}-x$, $x\in\left(\frac{1}{2^k},\frac{1}{2^{k-1}}\right]$, este o bijecţie. Ca urmare, aceeaşi proprietate o are şi funcţia

$f_2' : (0,1] \to (0,1)$ dată de

$$f_2'(x) = f_k(x), \text{ dacă } x \in \left(\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k-1}}\right]. \tag{7}$$

În aceeaşi măsură se poate proceda pentru a indica o bijecţie $f_3' : [0,1) \to (0,1)$ (se porneşte cu un şir de numere pozitive strict crescător la 1).

2) Obişnuit, notăm cu φ_X restricţia funcţiei φ dată de (1) la mulţimea $X \subset \mathbb{R}$. Din consideraţiile precedente rezultă că funcţiile $F_1 : (a,b) \to \mathbb{R}$, $F_2 : (a,b] \to \mathbb{R}$, $F_3 : [a,b) \to \mathbb{R}$ şi $F_4 : [a,b] \to \mathbb{R}$ definite prin $F_1 = f_1 \circ \varphi_{(a,b)}$, $F_2 = f_2 \circ \varphi_{(a,b]}$, $F_3 = f_3 \circ \varphi_{[a,b)}$ şi, respectiv, $F_4 = f_4 \circ \varphi_{[a,b]}$ sunt bijective (compuneri de bijecţii). Deci $\text{card}(a,b) = \text{card }(a,b] = \text{card }[a,b] = \mathfrak{c}$. Propoziţia este complet demonstrată.

Propoziţia 2. *Pentru orice $a \in \mathbb{R}$, semidreptele $(a,+\infty)$, $(-\infty,a)$, $[a,+\infty)$ şi $(-\infty,a]$ au puterea continuului.*

Demonstraţie. Apelând la translaţia (2), am putea reduce semidreptele din enunţ la cazul în care $a = 0$; nu vom obţine avantaje esenţiale, motiv pentru care renunţăm.

Este evident că funcţiile $G_1 : (a,+\infty) \to \mathbb{R}$ şi $G_2 : (-\infty,a) \to \mathbb{R}$ definite prin $G_1(x) = \ln(x-a)$, $\forall x > a$ şi $G_2(x) = \ln(a-x)$, $\forall x < a$, sunt bijecţii.

În privinţa semidreptelor închise $[a,+\infty)$ şi $(-\infty,a]$, pentru construcţia de bijecţii între acestea şi $\mathbb{R}$ se poate urma fiecare dintre cele două căi indicate în soluţiile de mai sus. Astfel, dacă avem în vedere semidreapta $[a,+\infty)$, notăm $A = (a,+\infty) - \{a+1, a+2, \ldots\}$ şi scriem $[a,+\infty) = A \cup \{a, a+1, a+2, \ldots\}$ şi $(a,+\infty) = A \cup \{a+1, a+2, \ldots\}$. Construcţia unei bijecţii $g : [a,+\infty) \to (a,+\infty)$ este evidentă şi obţinem în cele din urmă o bijecţie $G_3 : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ prin compunerea $G_3 = G_1 \circ g$.

Sau, procedând pe a doua cale, scriem $[a,+\infty) = [a,a+1) \cup [a+1,a+2) \cup \ldots$ şi $(a,+\infty) = (a,a+1] \cup (a+1,a+2] \cup \ldots$, apoi realizăm pentru fiecare $k \in \mathbb{N}$ câte o bijecţie $g_k : [a+k, a+k+1) \to (a+k, a+k+1]$ prin $g_k(t) = (2a+2k+1) - t$, $\forall t \in [a+k, a+k+1)$, obţinem o bijecţie $g' : [a,+\infty) \to (a,+\infty)$. În final, funcţia $G_3' : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$, dată de $G_3' = G_1 \circ g'$, este bijecţie. Cu semidreapta $(-\infty,a]$ se procedează similar. Demonstraţia este încheiată.

Corolar. *Intervalele dreptei reale, ca şi $\mathbb{R}$ însăşi, au cardinalul $\mathfrak{c}$.*

3. Cardinalul unor intervale, discuri şi coroane din $\mathbb{R}^2$. Să trecem de la spaţiul unidimensional $\mathbb{R}$ la $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Consideraţiile următoare se vor referi numai la $\mathbb{R}^2$, trecerea la $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, făcându-se fără dificultate.

În planul $\mathbb{R}^2$, corespunzătorul unui interval $(a,b) = \{x; a < x < b\}$ din $\mathbb{R}$ este atât intervalul bidimensional $\{(x,y); a < x < b, c < y < d\}$, cât şi coroana circulară $\{(x,y); a < \sqrt{x^2+y^2} < b\}$ (care, în particular, poate fi un disc). Vom stabili mai jos că intervalele (bidimensionale), discurile şi coroanele circulare - deschise, închise, semiînchise - ca şi spaţiul R^2 au cardinalul $\mathfrak{c}$.

Aşadar, în spiritul acestei note, vom arăta cum se poate construi o bijecţie între oricare dintre aceste mulţimi plane şi $\mathbb{R}$.

Date numerele $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ cu $a < b$ şi $c < d$, avem şase tipuri de intervale bidimensionale $\{(x,y); a < x < b, c < y < d\}$, $\{(x,y); a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$,

$\{(x,y); a \le x < b, c \le y < d\}$, $\{(x,y); a < x \le b, c < y \le d\}$, $\{(x,y); a \le x < b, c < y \le d\}$, $\{(x,y); a < x \le b, c \le y < d\}$.

Propoziţia 3. 1) *Dacă I^2 notează un interval bidimensional, atunci $\exists F : I^2 \to \mathbb{R}$ bijectivă.*

2) $\exists G : \{(x,y); 0 \le x < 1, 0 \le y < 1\} \to [0,1)$ *bijectivă.*

3) *Intervalele bidimensionale au cardinalul $\mathfrak{c}$.*

Demonstraţie. Să luăm, de exemplu, $I^2 = \{(x,y); a < x < b, c < y < d\}$. Avem $I^2 = (a,b) \times (c,d)$. Conform Propoziţiei 1, $\exists f : (a,b) \to \mathbb{R}$ şi $g : (c,d) \to \mathbb{R}$ bijective. Atunci, funcţia $F : I^2 \to \mathbb{R}^2$ definită prin $F(x,y) = (f(x), g(y))$, $\forall (x,y) \in I^2$ este bijectivă.

2) Fie (x,y) un punct oarecare al pătratului $P = \{(x,y); 0 \le x < 1, 0 \le y < 1\}$. Coordonatele x şi y se pot scrie sub formă de fracţii zecimale infinite (convenim ca de la un loc încolo să nu apară numai cifra 9). Grupăm zecimalele numerelor x şi y astfel: fiecare grupă conţine o singură cifră diferită de 9 care încheie grupa (de exemplu, $x = 0,94709913958\ldots$ are grupele: $94, 7, 0, 991, 3, 95, 8, \ldots$). Pentru x obţinem şirul de grupe $g_1, g_2, \ldots$, iar pentru y şirul $g_1', g_2', \ldots$ Fie t numărul zecimal având şirul de grupe $g_1, g_1', g_2, g_2', \ldots$ Funcţia $G : P \to [0,1)$ definită prin $G(x,y) = t$ este bijecţie.

3) Afirmaţia este o consecinţă a punctelor precedente şi a punctului 1) al Propoziţiei 1: succesiunea $I^2 \to \mathbb{R}^2 \to \{(x,y); 0 \le x < 1, 0 \le y < 1\} \to [0,1) \to \mathbb{R}$ sugerează bijecţiile ce trebuie compuse pentru a obţine o bijecţie de la I^2 la $\mathbb{R}$. Aşadar, card $I^2 = \mathfrak{c}$.

Corolar. *Există o bijecţie între $\mathbb{R}^n$ şi $\mathbb{R}$, i.e. card $\mathbb{R}^n = \mathfrak{c}$.*

Demonstraţie. Prin inducţie, pe baza faptului că $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$, $n \ge 2$.

Observaţie. O bijecţie între $\mathbb{R}^2$ şi $\mathbb{R}$ poate fi interpretată astfel: poziţia unui punct în plan este dată de o singură coordonată. Vom arăta, însă, că o bijectie de la $\mathbb{R}^2$ la $\mathbb{R}$ *nu este funcţie continuă*; bijecţia carteziană atribuie punctului din plan două coordonate, dar funcţiile-proiecţie pe axe sunt continue. Într-adevăr, să presupunem, prin absurd, că ar exista o funcţie $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bijectivă şi continuă (pe $\mathbb{R}^2$ şi $\mathbb{R}$ se consideră metricele euclidiene). Axa x-lor, notată X, este mulţime conexă în $\mathbb{R}^2$. Imaginea sa prin α, notată X', este o parte conexă a lui $\mathbb{R}$, deci un interval. Axa Y-lor, notată Y, este conexă în R^2 şi imaginea sa, Y', este un interval cu un singur punct comun cu X'. Evident, acest punct nu poate fi în interiorul intervalului X', ci extremitate a lui. Alte două drepte Y_1 şi Y_2 paralele cu Y, distincte de Y şi între ele, au ca imagine prin α intervalele Y_1' şi Y_2', fiecare având în comun cu X' o extremitate a acestuia. Absurd, întrucât Y', Y_1' şi Y_2' sunt disjuncte.

Vom considera numai discuri şi coroane circulare cu centrul în origine, celelalte putând fi aduse în această situaţie printr-o translaţie. Pentru coroane utilizăm notaţiile:

$$C(a,b) = \{(x,y); a^2 < x^2 + y^2 < b^2\}, \quad C[a,b) = \{(x,y); a^2 \le x^2 + y^2 < b^2\},$$
$$C(a,b] = \{(x,y); a^2 < x^2 + y^2 \le b^2\} \text{ şi } C[a,b] = \{(x,y); a^2 \le x^2 + y^2 \le b^2\},$$

unde $a, b \in \mathbb{R}$, $0 \le a < b$, sunt razele coroanei. Pentru $a = 0$, $C[0,b)$ este discul deschis $D[0,b) = \{(x,y); x^2+y^2 < b^2\}$, iar $C(0,b)$ este discul deschis punctat (i.e, fără centru) $D^*(0,b) = \{(x,y); 0 < x^2+y^2 < b^2\}$; similar, $D[0,b]$ şi $D^*(0,b]$ notează discurile închis şi punctat închis de rază b.

Lema 1. *Prin transformarea*

$$\left\{\begin{aligned} x' &= \frac{1}{b-a}\left[(d-c) - \frac{ad-bc}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]x, \\ y' &= \frac{1}{b-a}\left[(d-c) - \frac{ad-bc}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]y, \end{aligned}\right. \tag{8}$$

coroana de raze a, b trece în coroana de raze c, d pătrunzând în acelaşi timp tipul (de ex., $C(a,b]$ trece în $C(c,d]$ etc.).

Demonstraţie. Punctului $P(x,y)$ facem să-i corespundă punctul $P'(x',y')$ încât: 1) $P' \in OP$, unde O notează originea $(0,0)$; 2) segmentul $C(a,b] \cap OP$ trece în segmentul $C(c,d] \cap OP$ printr-o transfomare liniară $L : \rho' = \alpha\rho + \beta$ ce verifică condiţiile $L(a) = c$ şi $L(b) = d$ (evident, coordonata pe OP este distanţa ρ la originea O, adică $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$. Condiţia 2) conduce imediat la următoarea expresie pentru L: $\rho' = \dfrac{d-c}{b-a}\rho - \dfrac{ad-bc}{b-a}$, iar condiţia 1) revine la $\dfrac{y'}{x'} = \dfrac{y}{x}$. Rezolvând sistemul acestor două ecuaţii în x', y' obţinem (8).

Lema 2. *Prin transformarea*

$$\left\{\begin{aligned} x' &= \left(\frac{a+b}{\sqrt{x^2+y^2}} - 1\right)x, \\ y' &= \left(\frac{a+b}{\sqrt{x^2+y^2}} - 1\right)y, \end{aligned}\right. \tag{9}$$

imaginea coroanei $C[a,b)$ este coroana $C(a,b]$.

Demonstraţie. Urmăm demonstraţia Lemei 1, cu modificarea următoare: coeficienţii α şi β din condiţia 2) se vor determina din condiţiile $L(a) = b$ şi $L(b) = a$. În final se obţine transformarea (9).

Propoziţia 4. 1) *Există o bijecţie între orice tip de disc sau coroană circulară şi* $\mathbb{R}^2$.

2) *Cardinalul oricărui disc sau coroane circulare este* $\mathfrak{c}$.

Demonstraţie. 1) Conform Lemei 1, putem construi o bijecţie între două coroane de acelaşi tip, indiferent de razele lor. Lema 2 indică o bijecţie între coroanele de tip diferit $C[a,b)$ şi $C(a,b]$ având aceleaşi raze.

Cu procedeul din Propoziţia 1, Soluţia II, vom indica o bijecţie între $C(a,b]$ şi $C(a,b)$. Într-adevăr, fie $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ şirul strict descrescător la a definit prin $a_k = a + \dfrac{b-a}{2^k}$, $k \in \mathbb{N}$. Avem $C(a,b] = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} C(a_k, a_{k-1}]$ şi $C(a,b) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} C[a_k, a_{k-1})$. Conform Lemei 2, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ putem indica o bijecţie $F_k : C(a_k, a_{k-1}] \to C[a_k, a_{k-1})$

şi apoi definim bijecţia $F : C(a,b] \to C(a,b)$ prin $F(x,y) = F_k(x,y)$ dacă $(x,y) \in C(a_k, a_{k-1}]$.

Cu acest ultim rezultat şi ţinând seama de relaţiile $C[a,b] = C(a,b] \cup \{(x,y)x^2 + y^2 = a\}$ şi $C[a,b) = C(a,b) \cup \{(x,y); x^2+y^2 = a^2\}$ stabilim o bijecţie între coroanele $C[a,b]$ şi $C[a,b)$.

Stabilim cum se poate construi o bijecţie între discul $D(0,a)$ şi discul punctat $D^*(0,a) \equiv C(0,a)$. Procedăm ca în Propoziţia 1, Soluţia I. Fie $(a_k)_{k\geq 2}$ şirul dat de $a_k = \left(\frac{a}{k}, \frac{a}{k}\right)$, $k \geq 2$, şir inclus în $D^*(0,a)$. Notăm $A = D^*(0,a) - \{a_2, a_2, \ldots\}$. Avem $D(0,a) = A \cup \{0, a_2, a_3, \ldots\}$ şi $D^*(0,a) = A \cup \{a_2, a_3, \ldots\}$ şi construcţia bijecţiei dorite este evidentă.

Se constată uşor că o bijecţie între $D(0,1)$ şi $\mathbb{R}^2$ este realizată prin transformarea

$$(10) \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \\ y' = \dfrac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \end{cases}$$

ceea ce încheie demosntraţia punctului 1).

2) Afirmaţia rezultă pe baza precedentelor şi relaţiei card $\mathbb{R} = \mathfrak{c}$.

4. Comentariu final. În Secţiunile 2 şi 3 au fost considerate mulţimi cu o formă geometrică simplă. Nu întâmplător, în construcţia bijecţiilor cu care s-a arătat că ele au puterea continuului, s-au folosit cunoştinţe de geometrie. Se înţelege că, pentru o mulţime M complicată, construcţia unei bijecţii $f : M \to \mathbb{R}$ este anevoioasă sau imposibilă. Teoria mulţimilor oferă alte instrumente puternice de lucru ce permit stabilirea cardinalului unei mulţimi ([**1**], [**2**]). De exemplu, *dacă mulţimile* A, B, C *sunt astfel încât* $A \subset B \subset C$ *şi card* $A =$ *card* C, *atunci avem şi card* $B =$ *card* $A =$ *card* C. Aceste afirmaţii sunt ilustrate de

Propoziţia 5. *Mulţimea numerelor iraţionale din intervalul* $(0,1)$ *are puterea continuului.*

Demonstraţie. Notăm cu Q_1 şi I_1 mulţimile numerelor raţionale şi, respectiv, iraţionale din intervalul $(0,1]$. Ştim că Q_1 este numărabilă.

Avem $I_1 = (I_1 - \alpha Q_1) \cup \{x; x \in \alpha Q_1, x \leq \frac{\alpha}{2}\} \cup \{x; x \in \alpha Q_1, \frac{\alpha}{2} < x \leq \alpha\}$ şi $(0,1] = (I_1 - \alpha Q_1) \cup \alpha Q_1 \cup Q_1$, unde $\alpha \in I_1$ este un număr iraţional luat în mod arbitrar, iar $\alpha Q_1 = \{\alpha r; r \in Q_1\}$. Se verifică uşor că funcţia $f : I_1 \to (0,1]$ definită prin $f(x) = x$ dacă $x \in I_1 - \alpha Q_1$, $f(x) = 2x$ dacă $x \in \alpha Q_1$ şi $x \leq \frac{\alpha}{2}$, $f(x) = 2x - 1$ dacă $x \in \alpha Q_1$ şi $\frac{\alpha}{2} < x \leq \alpha$ este o bijecţie. Cum card $(0,1] = \mathfrak{c}$ (Propoziţia 1), rezultă că avem şi card $I_1 = \mathfrak{c}$.

Bibliografie

1. O. Constinescu, C. Amihăesei, T. Bîrsan – *Topologie generală. Probleme,* E.D.P., Bucureşti, 1974.

2. K. Kuratowski – *Introducere în teoria mulţimilor şi în topologie*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1969.