ARTICOLE ŞI NOTE

Alte proprietăţi caracteristice triunghiului echilateral

Titu ZVONARU[1], *Neculai STANCIU*[2]

Abstract. This article is a continuation of the paper [**3**]. We obtain several other characterizations of the equilateral triangle.

Keywords: orthocenter, centroid, incenter, Nagel point, Gergonne point, Spiecker point.

MSC 2000: 51M04.

Scopul lucrării de faţă este găsirea unor proprietăţi caracteristice triunghiului echilateral, pe linia celor stabilite în [**3**]. Vom folosi aceleaşi notaţii: astfel, punctului H (ortocentru) îi corespunde $\triangle A_H B_H C_H$ (triunghiul pedal determinat de punctul H) având punctele importante, cu semnificaţiile evidente, O_H, G_H, H_H, I_H etc. Ca şi în [**3**], avem în vedere numai triunghiuri ascuţitunghice. Vom rezolva câteva dintre problemele de tipul: *dacă două puncte importante* (*luate din diferite triunghiuri pedale*) *coincid, atunci $\triangle ABC$ este echilateral.* O atenţie deosebită va fi acordată *punctului lui Spiecker* al triunghiului ABC – centrul cercului înscris în triunghiul median, adică, în notaţiile convenite, punctul I_G.

Procedeul utilizat decurge din observaţia: punctele X şi Y coincid dacă şi numai dacă picioarele cevienelor duse prin aceste puncte coincid (este suficientă coincidenţa picioarelor numai pe două laturi ale triunghiului). Vom pune acum la punct instrumentul de lucru; mai întâi, reproducem un rezultat din [**4**]:

Lemă. *În triunghiul ABC considerăm ceviana AD, cu $D \in (BC)$. Dacă o secantă intersectează laturile AB, AC şi ceviana AD în punctele M, N, respectiv P, atunci sunt adevărate următoarele două relaţii:*

$$\frac{AM}{AB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{AC}{AN}\cdot\frac{PN}{PM}=1; \quad (R_1) \qquad \frac{AP}{PD}=\frac{BC\cdot\dfrac{AM}{MB}\cdot\dfrac{AN}{NC}}{BD\cdot\dfrac{AM}{MB}+DC\cdot\dfrac{AN}{NC}}. \quad (R_2)$$

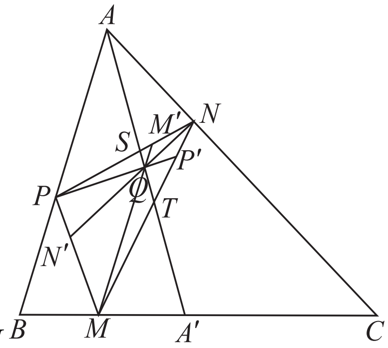
Problemă. *Fie ABC un triunghi şi punctele M, N, P pe laturile BC, CA respectiv AB astfel încât $\dfrac{BM}{MC}=k_1$, $\dfrac{CN}{NA}=k_2$, $\dfrac{AP}{PB}=k_3$. În triunghiul MNP considerăm cevienele MM', NN', PP' concurente în punctul Q ($M' \in (NP), N' \in (PM), P' \in (MN)$), cu $\dfrac{M'N}{M'P}=p_1$, $\dfrac{N'P}{N'M}=p_2$, $\dfrac{P'M}{P'N}=p_3$. Dacă $\{A'\}=AQ\cap BC$, să se calculeze raportul $\dfrac{BA'}{A'C}$.*

Soluţie. Conform teoremei lui Ceva avem $p_1p_2p_3=1$. Notăm $\{S\}=AA'\cap PN$, $\{T\}=AA'\cap MN$ şi $\dfrac{SP}{SN}=t$, $\dfrac{BA'}{A'C}=x$ (dacă AQ intersectează $[PM]$, calculele sunt similare). Rezultă uşor că $\dfrac{A'M}{A'C}=\dfrac{A'B-BM}{A'C}=x-\dfrac{k_1\cdot BC}{k_1+1}\cdot\dfrac{x+1}{BC}=\dfrac{x-k_1}{k_1+1}$.

[1]Comăneşti, e-mail: *tzvonaru@yahoo.com*

[2]Profesor, Şcoala generală "George Emil Palade", Buzău, e-mail: *stanciuneculai@yahoo.com*

Conform relaţiei (R_1), avem $\frac{AP}{AB} \cdot \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{AC}{AN} \cdot \frac{SN}{SP} = 1 \Leftrightarrow \frac{k_3}{k_3+1} \cdot x \cdot (k_2+1) \cdot \frac{1}{t} = 1$, adică



$$\text{(1)} \qquad \frac{t}{x} = \frac{k_3(k_2+1)}{k_3+1}.$$

Cu relaţia (R_2), deducem că
(2)
$$\frac{QN}{QN'} = \frac{PM \cdot \frac{SN}{SP} \cdot \frac{TN}{TM}}{PN' \cdot \frac{SN}{SP} + N'M \cdot \frac{TN}{TM}} = \frac{\frac{1}{t} \cdot \frac{TN}{TM}}{\frac{p_2}{p_2+1} \cdot \frac{1}{t} + \frac{1}{p_2+1} \cdot \frac{TN}{TM}},$$

iar cu relaţia lui Van Aubel avem $\frac{QN}{QN'} = \frac{NM'}{M'P} + \frac{NP'}{P'M} = p_1 + \frac{1}{p_3} = p_1 + p_1p_2 = p_1(p_2+1)$ şi atunci (2) se scrie succesiv: $p_1(p_2+1) \cdot \frac{1}{p_2+1}\left(\frac{p_2}{t} + \frac{TN}{TM}\right) = \frac{1}{t} \cdot \frac{TN}{TM} \Leftrightarrow \frac{p_1p_2}{t} + p_1 \cdot \frac{TN}{TM} = \frac{1}{t} \cdot \frac{TN}{TM}$, deci

$$\text{(3)} \qquad \frac{TM}{TN} = \frac{1-p_1t}{p_1p_2}.$$

Cu teorema lui Menelaus în $\triangle MNC$ şi transversala $A - T - A'$ obţinem $\frac{TM}{TN} \cdot \frac{AN}{NC} \cdot \frac{A'C}{A'M} = 1$ sau

$$\text{(4)} \qquad \frac{1-p_1t}{p_1p_2} \cdot \frac{1}{k_2+1} \cdot \frac{k_1+1}{x-k_1} = 1.$$

Înlocuind în (4) pe t dat de (1), se obţine o ecuaţie de gradul I cu necunoscuta x, având soluţia

$$(*) \qquad x = \frac{k_3+1}{k_2+1} \cdot \frac{k_1p_1p_2(k_2+1) + (k_1+1)}{p_1p_2(k_3+1) + k_3p_1(k_1+1)}.$$

Dacă X este un punct important în $\triangle A_YB_YC_Y$, vom nota cu x_{XY} raportul în care dreapta AX împarte latura BC a triunghiului ABC. În cazul punctului lui Spiecker, I_G, avem $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ şi $p_1 = \frac{c}{b}$, $p_2 = \frac{a}{c}$, $p_3 = \frac{b}{a}$; deci, utilizând relaţia $(*)$, obţinem $x_{IG} = \frac{a+b}{a+c}$.

Propoziţia 1. *Dacă $I_G \equiv G_I$ (i.e. punctul lui Spiecker coincide cu centrul de greutate al triunghiului pedal al punctului I), atunci $\triangle ABC$ este echilateral.*

Demonstraţie. Relativ la punctul G_I avem $k_1 = \dfrac{c}{b}$, $k_2 = \dfrac{a}{c}$, $k_3 = \dfrac{b}{a}$ şi $p_1 = p_2 = p_3 = 1$; cu relaţia $(*)$, obţinem $x_{GI} = \dfrac{c(a+b)(a+b+2c)}{b(a+c)(a+2b+c)}$. Dacă $I_G \equiv G_I$, în mod necesar $x_{IG} = x_{GI}$, i.e. $\dfrac{a+b}{a+c} = \dfrac{c(a+b)(a+b+2c)}{b(a+c)(a+2b+c)} \Leftrightarrow ab + 2b^2 + bc = ac + bc + 2c^2 \Leftrightarrow (b-c)(a+2b+2c) = 0$, deci $b = c$. Analog deducem $a = b$, deci $a = b = c$ şi $\triangle ABC$ este echilateral.

Propoziţia 2. *Dacă $I_G \equiv G_H$ (i.e. punctul lui Spiecker coincide cu centrul de greutate al triunghiului ortic al $\triangle ABC$), atunci $\triangle ABC$ este echilateral.*

Demonstraţie. Relativ la G_H avem $k_1 = \dfrac{c\cos B}{b\cos C}$, $k_2 = \dfrac{a\cos C}{c\cos A}$, $k_3 = \dfrac{b\cos A}{a\cos A}$ şi $p_1 = p_2 = p_3 = 1$; cu relaţia $(*)$, după calcule de rutină, obţinem $x_{GH} = \dfrac{c^2(a\cos A + b\cos B)}{b^2(a\cos A + c\cos C)}$. Avem: $x_{IG} = x_{GH} \Leftrightarrow \dfrac{a+b}{a+c} = \dfrac{c^2(a\cos A + b\cos B)}{b^2(a\cos A + c\cos C)} \Leftrightarrow [a^2(b^2 - c^2) + a(b^3 - c^3)]\cos A + bc(b^2 - c^2) + \dfrac{bc}{2a}[a^2(b-c) + b^3 - c^3 + bc(b-c)] = 0$ (s-au înlocuit $\cos B$ şi $\cos C$ prin expresiile date de teorema cosinusului) şi rezultă $b = c$. Analog deducem $a = b$, deci $\triangle ABC$ este echilateral.

Propoziţia 3. *Fie Γ punctul lui Gergonne al $\triangle ABC$. Dacă $I_G \equiv G_\Gamma$ (i.e. punctul lui Spiecker coincide cu centrul de greutate al triunghiului pedal al punctului Γ), atunci $\triangle ABC$ este echilateral.*

Demonstraţie. Pentru Γ avem $k_1 = \dfrac{p-b}{p-c}$, $k_2 = \dfrac{p-c}{p-a}$, $k_3 = \dfrac{p-a}{p-b}$, $p_1 = p_2 = p_3 = 1$ şi obţinem $x_{G\Gamma} = \dfrac{c}{b} \cdot \dfrac{a(p-a) + b(p-b)}{a(p-a) + c(p-c)}$. Avem succesiv:

$$x_{I\Gamma} \equiv x_{G\Gamma} \Leftrightarrow \frac{a+b}{a+c} = \frac{2abc + ac^2 + bc^2 - a^2c - b^2c}{2abc + ab^2 + b^2c - a^2b - bc^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (b-c)(4abc - a^3 + ab^2 + abc + ac^2 + b^2c + bc^2) = 0.$$

Deoarece $2abc + ab^2 + ac^2 = a(b+c)^2 > a^3$ (din inegalitatea triunghiului), rezultă $b = c$. Analog deducem $a = b$ şi concluzia dorită.

Propoziţia 4. *Fie N punctul lui Nagel. Dacă $I_G \equiv G_N$ (i.e. punctul lui Spiecker coincide cu centrul de greutate al triunghiului pedal al punctului N), atunci $\triangle ABC$ este echilateral.*

Demonstraţie. În cazul punctului N, $k_1 = \dfrac{p-c}{p-b}$, $k_2 = \dfrac{p-a}{p-c}$, $k_3 = \dfrac{p-b}{p-a}$, $p_1 = p_2 = p_3 = 1$ şi, ca urmare, $x_{GN} = \dfrac{c(p-c)(a+b)}{b(p-b)(a+c)}$. Atunci $x_{IG} \equiv x_{GN} \Leftrightarrow \dfrac{a+b}{a+c} = \dfrac{c(p-c)(a+b)}{b(p-b)(a+c)} \Leftrightarrow b(p-b) = c(p-c) \Leftrightarrow (b-c)(b+c-a) = 0$, de unde $b = c$. Analog deducem că $a = b$ şi, deci, concluzia dorită.

Propoziţia 5. *Dacă* $H_G \equiv G_H$ *(i.e. ortocentrul triunghiului median coincide cu centrul de greutate al triunghiului ortic), atunci* $\triangle ABC$ *este echilateral.*

Demonstraţie. Valoarea raportului x_{GH} a fost stabilită în Propoziţia 2. Pentru punctul H_G avem $k_1 = k_2 = k_3 = 1$, $p_1 = \dfrac{c\cos B}{b\cos C}$, $p_2 = \dfrac{a\cos C}{c\cos A}$, $p_3 = \dfrac{b\cos A}{a\cos B}$ şi obţinem $x_{GH} = \dfrac{c\cos C}{b\cos B}$. Atunci,

$$x_{HG} = x_{GH} \Leftrightarrow \frac{\cos C}{\cos B} = \frac{c(a\cos A + b\cos B)}{b(a\cos A + c\cos C)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (ab\cos C - ac\cos B)\cos A + bc(\cos^2 C - \cos^2 B) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + b^2 - c^2 - a^2 + b^2)\cos A + 2bc(\cos C - \cos B)(\cos C + \cos B) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(b^2 - c^2)\cos A + 2bc\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right)(\cos C + \cos B) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(b^2 - c^2) cos A + \frac{1}{a}(b - c)(b + c - a)(b + c + a)(\cos C + \cos B) = 0,$$

deci $b = c$. Analog deducem $a = b$ şi rezultă că $\triangle ABC$ este echilateral.

Observaţii. 1) Formula (*) este utilă în situaţiile în care laturile triunghiului pedal se calculează relativ uşor sau nu este nevoie de ele ($p_1 = p_2 = p_3 = 1$). Dacă p_1, p_2, p_3 depind de laturile triunghiului şi acestea sunt greu de calculat (cum ar fi, de exemplu, cazul $\triangle A_O B_O C_O$ sau al $\triangle A_I B_I C_I$), calea descrisă mai sus nu poate fi urmată.

2) Cu formula $(*)$ se demonstrează uşor că $\triangle ABC$ este echilateral în următoarele situaţii:

a) Punctul Nagel al triunghiului median este centrul cercului înscris în triunghiul dat ([**1**]);

b) Punctul lui Lemoine al triunghiului de contact este punctul lui Gergonne al triunghiului dat ([**2**]);

c) Izotomicul ortocentrului triunghiului median este punctul lui Lemoine al triunghiului dat ([**3**]).

Bibliografie

1. **N. Altshiller-Court** – *College Geometry*, Barnes & Noble Books, New-York, 1968.
2. **G. Mihalescu** – *Geometria elementelor remarcabile*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1957.
3. **F. Toma** – *Proprietăţi caracteristice triunghiului echilateral*, Recreaţii Matematice, 1/2011, 17-19.
4. **T. Zvonaru, B. Ioniţă** – *Rapoarte determinate de o ceviană şi o secantă într-un triunghi*, Recreaţii Matematice, 1/2005, 15-17.