Aplicaţii ale inegalităţii mediilor în rezolvarea unor probleme de minim

Lucian TUŢESCU, Mihai DICU [1]

Abstract. In this note some inequalities are presented; they are obtained by the inequality of the arithmetical mean and geometrical mean. Moreover, every of the inequalities from 2) to 9) represents a generalisation of the previous inequality.

Keywords: AM-GM inequality, extremum problems.

MSC 2000: 52A40.

În propoziţia ce urmează, ultima inegalitate generalizează pe toate cele care o preced. Am prezentat gradat acest tip de inegalităţi din motive didactice lesne de înţeles.

Propoziţie. *Au loc următoarele inegalităţi:*

$$(1) \quad 2x^n + \frac{n}{x^2} \geq n+2, \quad (\forall)x \in (0,\infty), (\forall)n \in \mathbb{N};$$

$$(2) \quad (x+y)^n + 2^{n-1}\frac{n}{xy} \geq 2^{n-1}(n+2), \quad (\forall)x,y \in (0,\infty),\ (\forall)n \in \mathbb{N};$$

$$(3) \quad \prod_{i=1}^{n}(x_i+y_i) + 2^{n-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_iy_i} \geq 2^{n-1}(n+2), \quad (\forall)x,y \in (0,\infty),\ (\forall)n \in \mathbb{N};$$

$$(4) \quad 3x^n + \frac{n}{x^3} \geq n+3, \quad (\forall)x \in (0,\infty),\ (\forall)n \in \mathbb{N};$$

$$(5) \quad (x+y+z)^n + 3^{n-1}\frac{n}{xyz} \geq 3^{n-1}(n+3), \quad (\forall)x,y,z \in (0,\infty),\ (\forall)n \in \mathbb{N};$$

$$(6) \quad \prod_{i=1}^{n}(x_i+y_i+z_i) + 3^{n-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_iy_iz_i} \geq 3^{n-1}(n+3),$$
$$(\forall)x_i,y_i,z_i \in (0,\infty), (\forall)n \in \mathbb{N};$$

$$(7) \quad kx^n + \frac{n}{x^k} \geq n+k, \quad (\forall)x \in (0,\infty), (\forall)k,\ n \in \mathbb{N};$$

$$(8) \quad (x_1+x_2+\cdots+x_k)^n + \frac{nk^{n-1}}{x_1x_2\cdots x_k} \geq k^{n-1}(n+k),$$
$$(\forall)x_1,x_2,\cdots,x_k \in (0,\infty),\ (\forall)k,n \in \mathbb{N};$$

$$(9) \quad \prod_{i=1}^{n}(x_{i1}+x_{i2}+\cdots+x_{ik}) + k^{n-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_{i1}x_{i2}\cdots x_{ik}} \geq k^{n-1}(n+k),$$
$$(\forall)k,n \in \mathbb{N},\ (\forall)x_{ij} \in (0,\infty),\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,k}.$$

Demonstraţie. Pentru justificarea fiecăreia dintre aceste inegalităţi vom folosi inegalitatea mediilor, în diverse moduri, grupând corespunzător.

[1]Profesori, Colegiul Naţional "Fraţii Buzeşti", Craiova

1) Scriem membrul întâi desfăşurat şi apoi utilizăm inegalitatea mediilor:

$$2x^n + \frac{n}{x^2} = x^n + x^n + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{1}{x^2} \geq (n+2)\sqrt[n+2]{x^n x^n \frac{1}{x^2}\frac{1}{x^2}\cdots\frac{1}{x^2}} = n+2,$$

cu egalitate pentru $x = 1$ sau $n = 0$.

2) Împărţind cu 2^{n-1}, inegalitatea se scrie sub forma $\dfrac{(x+y)^n}{2^{n-1}} + \dfrac{n}{xy} \geq n+2$. Apoi, $\dfrac{(x+y)^n}{2^n} + \dfrac{(x+y)^n}{2^n} + \dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{xy} + \cdots + \dfrac{1}{xy} \geq (n+2)\sqrt[n+2]{\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^{2n}\dfrac{1}{(xy)^n}} \geq$ $(n+2)\sqrt[n+2]{\left(\sqrt{xy}\right)^{2n}\dfrac{1}{(xy)^n}} = n+2$. Egalitate avem pentru $x = y = 1$ sau $n = 0$.

3) Procedând în mod analog, vom avea

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{x_i+y_i}{2} + \prod_{i=1}^{n}\frac{x_i+y_i}{2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_iy_i} \geq (n+2)\sqrt[n+2]{\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{x_i+y_i}{2}\right)^2\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{x_iy_i}} \geq$$

$$\geq (n+2)\sqrt[n+2]{\left(\prod_{i=1}^{n}\sqrt{x_iy_i}\right)^2\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{x_iy_i}} = n+2,$$

cu egalitate pentru $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 1$ sau $n = 0$.

Observaţie. Pentru $n = 3$ se obţine *Problema 26315* [**1**].

4) şi 7) se dovedesc adaptând demonstraţia dată pentru 1), inegalităţile 5) şi 8) ca şi 2), iar 6) ca şi 3).

9) Dăm în detaliu demonstraţia acestei inegalităţi, care cuprinde ca nişte cazuri particulare inegalităţile 1)-8), aplicând în aceeaşi manieră inegalitatea mediilor. Notăm $P = \prod\limits_{i=1}^{n}(x_{i1}+x_{i2}+\cdots+x_{ik})$ şi $S = \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_{i1}x_{i2}\cdots x_{ik}}$. Să demonstrăm că $P + k^{n-1}S \geq (n+k)k^{n-1}$ sau $\dfrac{P}{k^{n-1}} + S \geq n+k$. Avem $\dfrac{P}{k^{n-1}} + S = \sum\limits_{i=1}^{k}\dfrac{P}{k^n} + \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_{i1}x_{i2}\cdots x_{ik}} \geq$ $(n+k)\sqrt[n+k]{\left(\dfrac{P}{k^n}\right)^k\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_{i1}x_{i2}\cdots x_{ik}}}$. Ţinând seama că

$$\frac{P}{k^n} = \frac{x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1k}}{k}\cdot\frac{x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{2k}}{k}\cdots\frac{x_{n1}+x_{n2}+\cdots+x_{nk}}{k} \geq$$

$$\geq \sqrt[k]{x_{11}x_{12}\cdots x_{1k}}\cdot\sqrt[k]{x_{21}x_{22}\cdots x_{2k}}\cdots\sqrt[k]{x_{n1}x_{n2}\cdots x_{nk}},$$

obţinem că $\dfrac{P}{k^{n-1}} + S \geq (n+k)\sqrt[n+k]{\prod\limits_{i=1}^{n}x_{i1}x_{i2}\cdots x_{ik}\cdot\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_{i1}x_{i2}\cdots x_{ik}}} = n+k$. Egalitate avem pentru $x_{ij} = 1, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,k}$.

Bibliografie

1. **D. Săvulescu, L. Tuţescu** – *Problema 26 315,* G.M.-B, nr. 6/2010, pag. 324.