În legătură cu o problemă de concurs

Dan Ştefan MARINESCU[1]***, Ioan ŞERDEAN*** [2]

Abstract. Proposition 2, the main result of the paper, extends some problems which have appeared in journals or contests of elementary mathematics.

Keywords: derivatives, convex functions.

MSC 2000: 26A51, 26A42.

1. Introducere. La *Olimpiada Naţională de Matematică* din anul 2005 autorii acestei note au propus următoarea problemă:

P1. *Fie* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *o funcţie care verifică condiţiile* $|f(x) - f(y)| \le |x - y|$, $(\forall) x, y \in [0,1]$ *şi* $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

a) Să se arate că $|\int_0^x f(t)dt| \le \frac{1}{2}x(1-x)$, $(\forall) x \in [0,1]$,

b) Dacă $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \frac{1}{8}$, *să se determine* f.

Enunţul acestei probleme a apărut în Lista scurtă a *Olimpiadei Naţionale de Matematică 2005* şi în R.M.C. 2005. În anul 2007 la cunoscutul *Concurs studenţesc de matematică Putnam* din U.S.A. s-a propus problema

P2. *Fie* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *o funcţie derivabilă cu derivata continuă şi* $\int_0^1 f(x)dx = 0$. *Atunci, pentru orice* $\alpha \in [0,1]$ *are loc inegalitatea* $|\int_0^\alpha f(x)dx| \le \frac{1}{8} \max_{0 \le x \le 1} |f'(x)|$.

În mod cert P2 se deduce din P1. Într-adevăr, fie $M = \max_{0 \le x \le 1} |f'(x)|$. Dacă $M = 0$, atunci f este constantă pe $[0,1]$ şi cum $\int_0^1 f(x)dx = 0$ deducem că f este funcţia nulă, iar inegalitatea este evidentă în acest caz. Dacă $M \neq 0$, atunci funcţia $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{M} f(x)$ verifică ipotezele problemei P1, de unde $|\int_0^1 g(x)dx| \le \frac{1}{2}\alpha(1-\alpha) \le \frac{1}{8}$, $(\forall)\alpha \in [0,1]$ şi, în concluzie, $|\int_0^\alpha f(x)dx| \le \frac{1}{8} \max_{0 \le x \le 1} |f'(x)|$.

Tot legat de problema P1, să remarcăm faptul că în numărul din martie 2011 al revistei americane *The College Mathematics Journal* apare sub semnătura lui **Duong Viet Thong** următoarea problemă:

P3. *Fie* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *o funcţie derivabilă cu derivata continuă şi* $\int_a^b f(x)dx = 0$. *Demonstraţi că* $|\int_a^b f(t)dt| \le M \frac{(x-a)(b-x)}{2}$, $(\forall) x \in [a,b]$, *unde* $M = \max_{x \in [a,b]} |f'(x)|$.

---

[1]Profesor dr., Colegiul Naţional "Iancu de Hunedoara", Hunedoara

[2]Profesor, Colegiul Naţional "Aurel Vlaicu", Orăştie

2. Rezultatul principal. Pentru scopul propus avem nevoie de câteva rezultate cunoscute relativ la funcţiile convexe. O funcţie $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ interval nedegenerat, este *convexă* dacă $f(ta+(1-t)b) \leq tf(a)+(1-t)f(b)$, $(\forall)a, b \in I, (\forall)t \in [0,1]$.

Propoziţia 1. *(i) $f : I \to \mathbb{R}$ este convexă dacă şi numai dacă $(\exists)m, n \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $g : I \to \mathbb{R}$ definită prin $g(x) = f(x) + mx + n$, $(\forall)x \in I$, este convexă.*

(ii) Dacă f este convexă, $a, b \in I$, $a < b$, şi $f(a) = f(b) = 0$, atunci $f(x) \leq 0$, $(\forall)x \in [a, b]$.

(iii) Dacă f convexă şi există $a, b \in I$, $a \neq b$ şi $t_0 \in (0,1)$ astfel încât $f(t_0a + (1-t_0)b) = t_0f(a) + (1-t_0)f(b)$, atunci $f(ta+(1-t)b) = tf(a)+(1-t)f(b)$, $(\forall)t \in [0,1]$.

(iv) Dacă f este derivabilă, atunci f este convexă dacă şi numai dacă f' este crescătoare.

Demonstraţie. (i) Se aplică faptul că orice funcţie afină (de gradul întâi) verifică definiţia funcţiei convexe cu egalitate.

(ii) Fie $x \in [a, b]$. Atunci există $t \in [0,1]$ astfel încât $x = ta + (1-t)b$ şi, cum f este convexă, deducem că $f(x) = f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b) = 0$.

(iii) Din f convexă şi din faptul că orice funcţie afină verifică definiţia convexităţii cu egalitate deducem că funcţia $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = f(ta + (1-t)b) - tf(a) - (1-t)f(b)$, este convexă, iar $\varphi(0) = \varphi(t_0) = \varphi(1) = 0$ şi $\varphi(t) \leq 0$, $(\forall)t \in [0,1]$. Dacă ar exista $t' \in (0,1)\backslash\{t_0\}$ astfel încât $\varphi(t') < 0$, din convexitate s-ar obţine o contradicţie.

Într-adevăr, avem: (a) dacă $0 < t' < t_0$, atunci există $s \in (0,1)$ astfel ca $t_0 = st' + (1-s) \cdot 1$, de unde $\varphi(t_0) \leq s \cdot \varphi(t') + (1-s)\varphi(1) = s \cdot \varphi(t') < 0$, ceea ce este fals.

(b) dacă $t_0 < t' < 1$ atunci există $s_1 \in (0,1)$ astfel ca $t_0 = s_1 \cdot 0 + (1-s_1)t'$ şi se obţine iarăşi contradicţie.

(iv) Fie $x, y \in I$ cu $x < y$. Conform unui rezultat cunoscut ([**1**],[**2**]), pentru orice $u, v \in I$ cu $x < u < v < y$ avem $\dfrac{f(u) - f(x)}{u - x} \leq \dfrac{f(v) - f(u)}{v - u} \leq \dfrac{f(v) - f(y)}{v - y}$, de unde deducem că $f'(x) \leq f'(y)$. Reciproc, fie $a, b \in I$, cu $a < b$ şi $t \in (0,1)$. Aplicând teorema lui Lagrange pe $[a, ta + (1-t)b]$ şi pe $[ta + (1-t)b, b]$, monotonia funcţiei f' ne conduce la concluzie.

Cititorii interesaţi de problematica funcţiilor convexe pot consulta excelentele monografii [**1**] şi [**2**]. Rezultatul principal este cuprins în

Propoziţia 2. *Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă cu proprietatea că $(\exists)L \geq 0$ astfel ca $|f'(x) - f'(y)| \leq L|x - y|$, $(\forall)x, y \in [a, b]$ şi $f(a) = f(b) = 0$. Atunci:*

(i) $|f(x)| \leq \dfrac{L}{2}(x-a)(b-x)$, $(\forall)x \in [a, b]$;

(ii) $|f'(x)| \leq \dfrac{L}{2}(b-a)$, $(\forall)x \in [a, b]$.

Demonstraţie. (i) Din $|f'(x) - f'(y)| \leq L|x - y|$, $(\forall)x, y \in [a, b]$, deducem că funcţiile $f_1, f_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ definite prin $f_1(x) = Lx - f'(x)$ şi $f_2(x) = Lx + f'(x)$, $(\forall)x \in [a, b]$ sunt crescătoare, de unde, conform cu Propoziţia 1, (i) şi (iv), avem că funcţiile $F_1, F_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ definite prin $F_1(x) = \dfrac{L}{2}(x-a)(x-b) - f(x)$ şi $F_2(x) = \dfrac{L}{2}(x-a)(x-b) + f(x)$ sunt convexe. Cum $F_i(a) = F_i(b) = 0$, $i \in \{1, 2\}$, din Propoziţia 1, (ii) deducem că $F_1(x) \le 0$, $F_2(x) \le 0$, $(\forall)x \in [a,b]$, de unde $-\frac{L}{2}(x-a)(b-x) \le f(x) \le \frac{L}{2}(x-a)(b-x)$, $(\forall)x \in [a,b]$, deci $|f(x)| \le \frac{L}{2}(x-a)(b-x)$, $(\forall)x \in [a,b]$.

(ii) Dacă $x = a$ sau $x = b$, atunci din punctul (i) deducem că $|f'(x)| \le \frac{L}{2}(b-a)$. Dacă $x \in (a,b)$ definim funcţia $h : [a,x] \to \mathbb{R}$ prin $h(t) = f(t) - \frac{f(x)(t-a)}{x-a}$, $(\forall)t \in [a,x]$. În mod evident, $h(a) = h(x) = 0$, h este derivabilă şi $|h'(t_1) - h'(t_2)| = \left| f'(t_1) - \frac{f(x)}{x-a} - f'(t_2) + \frac{f(x)}{x-a} \right| = |f'(t_1) - f'(t_2)| \le L|t_1 - t_2|$ şi, în consecinţă, h verifică ipotezele propoziţiei. Conform cu punctul (i), $|h(t)| \le \frac{L}{2}(t-a)(x-t)$, $(\forall)t \in [a,x]$, de unde $\left| \frac{h(t)-h(x)}{t-x} \right| \le \frac{L}{2}(t-a)$, ceea ce conduce la $|h'(x)| \le \frac{L}{2}(x-a)$. Cum $h'(x) = f'(x) - \frac{f(x)}{x-a}$, deducem că $(\forall)x \in [a,b]$ avem $|f'(x)| \le |h'(x)| + \frac{|f(x)|}{x-a} \le \frac{L}{2}(x-a) + \frac{L}{2}\frac{(x-a)(b-x)}{x-a} = \frac{L}{2}(b-a)$, adică $|f'(x)| \le \frac{L}{2}(b-a)$, $(\forall)x \in [a,b]$.

Observaţii. 1) Dacă există $x_0 \in (a,b)$ astfel încât în Propoziţia 2 relaţia (i) are loc cu egalitate, atunci conform cu Propoziţia 1, (iii) una dintre funcţiile F_1 şi F_2 este nulă pe $[a,b]$ şi, în consecinţă, $f(x) = \frac{L}{2}(x-a)(b-x)$, $(\forall)x \in [a,b]$ sau $f(x) = -\frac{L}{2}(x-a)(b-x)$, $(\forall)x \in [a,b]$.

2) Dacă există $x_0 \in (a,b)$ astfel încât în Propoziţia 2 relaţia (ii) are loc cu egalitate, atunci analizând demonstraţia găsim că în acelaşi x_0 are loc egalitate şi la (i) şi conform cu cele din observaţia precedentă găsim forma funcţiei f. Dacă $|f'(a)| = \frac{L}{2}(b-a)$ sau $|f'(b)| = \frac{L}{2}(b-a)$, ajungem imediat la concluzia că F_1 sau F_2 din demonstraţia punctului (i) sunt funcţiile căutate.

Observaţie. În fiecare din problemele P1, P2 funcţia $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definită prin $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, $(\forall)x \in [0,1]$, verifică condiţiile din Propoziţia 2 cu $a = 0$ şi $b = 1$ şi, în concluzie, P1 şi P2 sunt consecinţe ale acesteia. În acelaşi mod se observă că funcţia $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ definită prin $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ este funcţia din P3 şi, cum această funcţie verifică condiţiile din Propoziţia 2, deducem că P3 este o consecinţă a acesteia.

Bibliografie

1. **W.W. Breckner, T. Trif** - *Convex Functions and Related Functional Equations*, Cluj, 2008.
2. **C.P. Niculescu, L.-E. Persson** - *Convex Functions. Basic Theory and Applications*, Editura Universitaria Craiova, 2003.