Inegalităţi geometrice în poligoane convexe, de tip Bergström-Mitrinovič

***Dumitru M. BĂTINEŢU-GIURGIU*[1], *Neculai STANCIU*[2]**

Abstract. Some Mitrinovič type inequalities for general convex polygons are presented. The main tool in the proofs is Bergström inequality.

Keywords: Mitrinovič type inequalities, Bergström inequality, convex polygon.

MSC 2000: 51Mxx, 26D15.

Inegalitatea lui Bergström are următorul enunţ: *Dacă* $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, $x_k \in \mathbb{R}$, $y_k \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall k = \overline{1,n}$, $X_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$, $Y_n = \sum_{k=1}^{n} y_k$, *atunci:*

$$(B) \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{y_k} \geq \frac{X_n^2}{Y_n},$$

cu egalitate dacă şi numai dacă există $t \in \mathbb{R}^*$ *astfel încât* $x_k = ty_k$, $\forall k = \overline{1,n}$.

Inegalitatea lui D.S. Mitrinovič are următorul enunţ: *În orice triunghi de perimetru* $2p$, *circumscris unui cerc* $C(I; r)$, *are loc inegalitatea:*

$$(M) \qquad p \geq 3r\sqrt{3},$$

cu egalitatea dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

Scopul acestui articol este de a stabili unele inegalităţi geometrice (altele decât cele din [**1**]) de tipul (M) în poligoane convexe, folosind inegalitatea (B).

Pentru orice poligon convex $A_1A_2 \ldots A_n$, $n \geq 3$, vom nota cu S aria poligonului, cu $2p$ perimetrul poligonului, cu a_k lungimea laturii $[A_kA_{k+1}], k = \overline{1,n}$, $A_{n+1} \equiv A_1$, iar pentru orice punct M interior poligonului notăm $T_k = \mathrm{pr}_{A_kA_{k+1}} M$, $d_k = MT_k$, $u_k = \mu(\angle A_kMT_k)$, $v_k = \mu(\angle T_kMA_{k+1})$, $S_k = aria[A_kMA_{k+1}], \forall k = \overline{1,n}$.

Lemă. *Fie* $A, B, A \neq B$ *două puncte în plan şi* $M \notin AB$, *cu* $T = pr_{AB}M \in [AB]$; *atunci* $\dfrac{AB}{d} = \operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v$, *unde* $u = \mu(\widehat{AMT})$, $v = \mu(\widehat{TMB})$ *(în radiani), iar* d *este distanţa de la* M *la dreapta* AB.

Demonstraţie. Avem următoarele situaţii:

i) $T \in (AB)$. Atunci $\operatorname{tg} u = \dfrac{AT}{MT}$ şi $\operatorname{tg} v = \dfrac{BT}{MT}$, deci $\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v = \dfrac{AB}{MT}$.

ii) $T \equiv A$ (analog $T \equiv B$). Găsim $\operatorname{tg} u = 0$ şi $\operatorname{tg} v = \dfrac{BT}{MT}$, deci $\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v = \dfrac{AB}{MT}$.

Teorema 1. *Dacă* $A_1A_2 \ldots A_n$, $n \geq 3$, *este un poligon convex şi* M *este un punct interior lui astfel încât* $pr_{A_kA_{k+1}} M = T_k \in [A_kA_{k+1}]$, $\forall k = \overline{1,n}$, $A_{n+1} \equiv A_1$, *atunci*

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{d_k} \geq 2n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}.$$

[1]Profesor, Colegiul Naţional "Matei Basarab", Bucureşti
[2]Profesor, Şcoala Generală "George Emil Palade", Buzău

Demonstraţie. Conform Lemei avem $\dfrac{a_k}{d_k} = \operatorname{tg} u_k + \operatorname{tg} v_k$, $\forall k = \overline{1,n}$, de unde $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a_k}{d_k} = \sum\limits_{k=1}^{n} (\operatorname{tg} u_k + \operatorname{tg} v_k)$.

Deoarece funcţia $f : \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$ este convexă pe $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, rezultă că putem aplica inegalitatea lui Jensen şi obţinem $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a_k}{d_k} = \sum\limits_{k=1}^{n} (\operatorname{tg} u_k + \operatorname{tg} v_k) \geq 2n \operatorname{tg} \left(\dfrac{1}{2n} \sum\limits_{k=1}^{n} (u_k + v_k) \right)$. Din $\sum\limits_{k=1}^{n} (u_k + v_k) = 2\pi$, deducem că $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a_k}{d_k} \geq 2n \operatorname{tg} \dfrac{2\pi}{2n} = 2n \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{n}$, ceea ce era de demonstrat.

Observaţia 1.1. Dacă poligonul $A_1 A_2 \ldots A_n$ este circumscris unui cerc $C(I; r)$ şi $M \equiv I$, rezultă că $d_k = r$, $\forall k = \overline{1,n}$, iar (1) devine

$$(1') \qquad \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{2p}{r} \geq 2n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \Leftrightarrow p \geq nr \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}.$$

Inegalitatea $(1')$ este o generalizare a inegalităţii (M).

Observaţia 1.2. În cazul în care poligonul este un triunghi ABC, relaţia (1) devine

$$(1'') \qquad \frac{a}{d_a} + \frac{b}{d_b} + \frac{c}{d_c} \geq 6 \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = 6\sqrt{3}.$$

Pentru $M \equiv I$ obţinem inegalitatea (M).

Teorema 2. *Dacă $A_1 A_2 \ldots A_n$, $n \geq 3$, este un poligon convex şi M este un punct interior poligonului, atunci*

$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{d_k} \geq \frac{2p^2}{S}.$$

Demonstraţie. Avem $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a_k}{d_k} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a_k^2}{a_k d_k} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a_k^2}{2S_k}$. Aplicăm inegalitatea (B) şi obţinem $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a_k}{d_k} \geq \dfrac{(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k)^2}{2 \sum\limits_{k=1}^{n} S_k} = \dfrac{4p^2}{2S} = \dfrac{2p^2}{S}$, ceea ce era de demonstrat.

Observaţia 2.1. Dacă $A_1 A_2 \ldots A_n$, $n \geq 3$, este circumscris cercului $C(I; r)$, atunci $S = pr$, iar (2) devine $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a_k}{d_k} \geq \dfrac{2p^2}{pr} = \dfrac{2p}{r}$; apoi din $(1')$ deducem că

$$(2') \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{d_k} \geq 2n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}, \quad \forall M \in Int A_1 A_2 \ldots A_n.$$

Prin urmare, $\forall M \in IntABC$ are loc inegalitatea

$$(2'') \qquad \frac{a}{d_a} + \frac{b}{d_b} + \frac{c}{d_c} \geq \frac{2p}{r} \geq 6 \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}.$$

Teorema 3. *Dacă $A_1A_2 \ldots A_n$, $n \geq 3$, este un poligon convex şi M este un punct interior lui astfel încât $pr_{A_kA_{k+1}}M = T_k \in [A_kA_{k+1}]$, $\forall k = \overline{1,n}$, $A_{n+1} \equiv A_1$, atunci:*

$$(3) \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{d_k^2} \geq \frac{2n^2}{p} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n}.$$

Demonstraţie. Avem $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a_k}{d_k^2} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{a_k}\left(\dfrac{a_k}{d_k}\right)^2$, unde aplicăm (B) şi obţinem $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a_k}{d_k^2} \geq \dfrac{(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k}{d_k})^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k} = \dfrac{1}{2p}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a_k}{d_k}\right)^2$, de unde, folosind (1), deducem (3).

Observaţia 3.1. Dacă poligonul $A_1A_2 \ldots A_n$, $n \geq 3$, este circumscris cercului $C(I;r)$ şi $M \equiv I$, atunci (3) devine:

$$(3') \qquad 2p^2 \geq 2n^2r^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n} \Leftrightarrow p^2 \geq n^2r^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n}.$$

Teorema 4. *Dacă $A_1A_2 \ldots A_n$, $n \geq 3$, este un poligon convex şi M este un punct interior lui astfel încât $pr_{A_kA_{k+1}}M = T_k \in [A_kA_{k+1}]$, $\forall k = \overline{1,n}$, $A_{n+1} \equiv A_1$, atunci:*

$$(4) \qquad \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{d_k^2}\right) \geq 4n^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n}.$$

Demonstraţie. Avem $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{d_k^2} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{a_k^2}\left(\dfrac{a_k}{d_k}\right)^2$, unde aplicăm inegalitatea (B) şi obţinem $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{d_k^2} \geq \dfrac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a_k}{d_k}\right)^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2} \Leftrightarrow \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{d_k^2}\right) \geq \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a_k}{d_k}\right)^2$, apoi, ţinând cont de (1), deducem concluzia.

Observaţia 4.1. Dacă poligonul convex $A_1A_2 \ldots A_n$, $n \geq 3$, este circumscris cercului $C(I;r)$, iar $M \equiv I$, atunci $d_k = r$, $\forall k = \overline{1,n}$, şi relaţia (4) devine

$$(4') \qquad \frac{n}{r^2}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) \geq 4n^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \geq 4nr^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n}.$$

Teorema 5. *Dacă un poliedru convex are $n (n \geq 4)$ feţe poligoane convexe de arii $S_k (k = \overline{1,n})$, iar M este un punct interior poliedrului cu distanţa d_k la faţa de arie*

S_k şi V, S sunt volumul şi respectiv aria totală ale poliedrului, atunci:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{d_k} \geq \frac{S^2}{3V}. \tag{5}$$

Demonstraţie. Avem $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{S_k}{d_k} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{S_k^2}{d_k S_k} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{S_k^2}{3V_k}$, unde V_k este volumul piramidei de vârf M şi bază poligonul feţei de arie S_k. Aplicând inegalitatea (B), deducem că $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{S_k}{d_k} \geq \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} S_k\right)^2}{3\sum\limits_{k=1}^{n} V_k} = \frac{S^2}{3V}$, ceea ce era de demonstrat.

Observaţia 5.1. Dacă poliedrul este circumscris unei sfere $S(I; r)$ de centru I şi rază r atunci relaţia (5) devine:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{d_k} \geq \frac{S^2}{3V} = \frac{S^2}{Sr} = \frac{S}{r}. \tag{5'}$$

Dacă $M \equiv I$, atunci $d_k = r$, $\forall k = \overline{1, n}$, şi relaţia $(5')$ devine o egalitate.

Teorema 6. *În condiţiile teoremei 5, are loc inegalitatea:*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} S_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{d_k^2}\right) \geq \frac{S^4}{9V^2}. \tag{6}$$

Demonstraţie. Avem $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{d_k^2} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{S_k^2}\left(\frac{S_k}{d_k}\right)^2$, unde aplicăm inegalitatea (B) şi deducem $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{d_k^2} \geq \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{S_k}{d_k}\right)^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} S_k^2}$. Dacă ţinem seama de $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{S_k}{d_k} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{S_k^2}{d_k S_k} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{S_k^2}{3V_k}$ şi aplicăm din nou (B), atunci obţinem $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} S_k^2\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{d_k^2}\right) \geq \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{S_k}{d_k}\right)^2 \geq \frac{S^4}{9V^2}$, ceea ce era de demonstrat.

Observaţia 6.1. Dacă poliedrul este circumscris unei sfere $S(I; r)$ şi $M \equiv I$, atunci relaţia (6) devine $\frac{n}{r^2} \sum\limits_{k=1}^{n} S_k^2 \geq \frac{S^4}{9V^2} \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} S_k^2 \geq \frac{r^2 S^4}{9nV^2}$, apoi, ţinând seama că $rS = 3V$, obţinem

$$\sum_{k=1}^{n} S_k^2 \geq \frac{r^2 S^4}{nr^2 S^2} = \frac{S^2}{n}. \tag{6'}$$

Bibliografie

1. **M. Dincă, M. Bencze** – *Trip in world of geometrical inequalities (2),* Octogon Mathematical Magazine, vol 11, No. 1, april 2003, 45-76.