Metoda deligamentării şi rafinarea unor inegalităţi

Titu ZVONARU[1]

Scopul acestei note este de a prezenta demonstraţii elementare pentru unele inegalităţi, ca şi obţinerea unor rafinări ale acestora. Descrierea metodei deligamentării poate fi găsită în [**2**].

Pentru început, o demonstraţie prin metoda deligamentării a unei inegalităţi cunoscute:

1. $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\geq\dfrac{3}{2},\ \ a,b,c>0.$

Nesbitt

Soluţie. Avem $\dfrac{a}{b+c}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{2a-b-c}{2\,(b+c)}=\dfrac{a-b}{2\,(b+c)}+\dfrac{a-c}{2\,(b+c)}$ şi, analog, $\dfrac{b}{c+a}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{b-c}{2\,(c+a)}+\dfrac{b-a}{2\,(c+a)}$, $\dfrac{c}{a+b}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{c-a}{2\,(a+b)}+\dfrac{c-b}{2\,(a+b)}$. Grupând fracţiile în funcţie de numărătorii lor, obţinem:

$$\frac{a-b}{2\,(b+c)}+\frac{b-a}{2\,(c+a)}=\frac{(a-b)\,(c+a-b-c)}{2\,(b+c)\,(c+a)}=\frac{(a-b)^2}{2\,(b+c)\,(c+a)};$$

împreună cu relaţiile similare:

$$\frac{b-c}{2\,(c+a)}+\frac{c-b}{2\,(a+b)}=\frac{(b-c)^2}{2\,(c+a)\,(a+b)},\qquad \frac{c-a}{2\,(a+b)}+\frac{a-c}{2\,(b+c)}=\frac{(c-a)^2}{2\,(a+b)\,(b+c)},$$

deducem valabilitatea inegalităţii de demonstrat.

Metoda deligamentării, folosită în demonstraţia următoarelor inegalităţi, duce şi la obţinerea unor rafinări ale acestora. Chiar dacă sunt necesare unele calcule, acestea sunt uşor de condus către rezultatul dorit.

2. $\dfrac{a}{(b+c)^2}+\dfrac{b}{(c+a)^2}+\dfrac{c}{(a+b)^2}\geq\dfrac{3\,(a+b+c)}{4\,(ab+bc+ca)},\ \ a,b,c>0.$

Darij Grinberg şi Cezar Lupu

Soluţie. Demonstraţia din [**1**] face apel la *inegalitatea lui Cebâşev* şi la *inegalitatea lui Gerretsen*. Avem

$$\frac{a}{(b+c)^2}-\frac{3a}{4\,(ab+bc+ca)}=\frac{a\left(4ab+4bc+4ca-3b^2-3c^2-6bc\right)}{4\,(ab+bc+ca)\,(b+c)^2}=$$
$$=\frac{(3ab+ac)\,(a-b)}{4\,(ab+bc+ca)\,(b+c)^2}+\frac{(3ac+ab)\,(a-c)}{4\,(ab+bc+ca)\,(b+c)^2}$$

şi, analog,

$$\frac{b}{(c+a)^2}-\frac{3b}{4\,(ab+bc+ca)}=\frac{(3bc+ab)\,(b-c)}{4\,(ab+bc+ca)\,(c+a)^2}+\frac{(3ab+bc)\,(b-a)}{4\,(ab+bc+ca)\,(c+a)^2},$$
$$\frac{c}{(a+b)^2}-\frac{3c}{4\,(ab+bc+ca)}=\frac{(3ac+bc)\,(c-a)}{4\,(ab+bc+ca)\,(a+b)^2}+\frac{(3bc+ac)\,(c-b)}{4\,(ab+bc+ca)\,(a+b)^2}.$$

[1] Comăneşti, e-mail: *tzvonaru@yahoo.com*

Grupând convenabil, obţinem

$$\frac{(3ab+ac)(a-b)}{4(ab+bc+ca)(b+c)^2}+\frac{(3ab+bc)(b-a)}{4(ab+bc+ca)(c+a)^2}=$$
$$=\frac{a-b}{4(ab+bc+ca)}\cdot\frac{(3ab+ac)(c+a)^2-(3ab+bc)(b+c)^2}{(b+c)^2(c+a)^2},$$

şi cum

$$(3ab+ac)(c+a)^2-(3ab+bc)(b+c)^2=3a^3b+a^3c+3abc^2+ac^3+6a^2bc+$$
$$+2a^2c^2-3ab^3-b^3c-3abc^2-bc^3-6ab^2c-2b^2c^2=$$
$$=3ab\left(a^2-b^2\right)+c\left(a^3-b^3\right)+c^3(a-b)+6abc(a-b)+2c^2\left(a^2-b^2\right)=$$
$$=(a-b)\left(3a^2b+3ab^2+a^2c+abc+b^2c+c^3+6abc+2ac^2+2bc^2\right)=$$
$$=(a-b)\left(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2+3abc+2a^2b+2ab^2+4abc+c^3+bc^2+ac^2\right)=$$
$$=(a-b)\left[(a+b+c)(ab+bc+ca)+2a^2b+2ab^2+4abc+c^3+bc^2+ac^2\right],$$

deducem că

$$\frac{(3ab+ac)(a-b)}{4(ab+bc+ca)(b+c)^2}+\frac{(3ab+bc)(b-a)}{4(ab+bc+ca)(c+a)^2}=$$
$$=\frac{(a-b)^2\left[(a+b+c)(ab+bc+ca)+2a^2b+2ab^2+4abc+c^3+bc^2+ac^2\right]}{4(ab+bc+ca)(b+c)^2(c+a)^2}\geq$$
$$\geq\frac{(a-b)^2(a+b+c)(ab+bc+ca)}{4(ab+bc+ca)(b+c)(c+a)^2}=\frac{(a-b)^2(a+b+c)}{4(b+c)^2(c+a)^2}.$$

Prin permutări circulare obţinem încă două relaţii similare. Rezultă următoarea rafinare a inegalităţii date:

$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}-\frac{3(a+b+c)}{4(ab+bc+ca)}\geq$$
$$\geq\frac{a+b+c}{4}\left(\frac{(a-b)^2}{(b+c)^2(c+a)^2}+\frac{(b-c)^2}{(c+a)^2(a+b)^2}+\frac{(c-a)^2}{(a+b)^2(b+c)^2}\right).$$

3. $\dfrac{a^2}{b^2+c^2}+\dfrac{b^2}{c^2+a^2}+\dfrac{c^2}{a^2+b^2}\geq\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b},\quad a,b,c>0.$

Vasile Cârtoaje

Soluţie. Avem

$$\frac{a^2}{b^2+c^2}-\frac{a}{b+c}=\frac{ab(a-b)}{(b+c)(b^2+c^2)}+\frac{ac(a-c)}{(b+c)(b^2+c^2)},$$
$$\frac{b^2}{c^2+a^2}-\frac{b}{c+a}=\frac{bc(b-c)}{(c+a)(c^2+a^2)}+\frac{ab(b-a)}{(c+a)(c^2+a^2)},$$
$$\frac{c^2}{a^2+b^2}-\frac{c}{a+b}=\frac{ac(c-a)}{(a+b)(a^2+b^2)}+\frac{bc(c-b)}{(a+b)(a^2+b^2)}$$

şi mai departe

$$\frac{ab\,(a-b)}{(b+c)\,(b^2+c^2)}+\frac{ab\,(b-a)}{(c+a)\,(c^2+a^2)}=\frac{ab\,(a-b)}{(b+c)\,(c+a)\,(b^2+c^2)\,(c^2+a^2)}\cdot$$
$$\cdot\left(c^3+ac^2+a^2c+a^3-b^3-b^2c-bc^2-c^3\right)=$$
$$=\frac{ab\,(a-b)^2\left(c^2+ac+bc+a^2+ab+b^2\right)}{(b+c)\,(c+a)\,(b^2+c^2)\,(c^2+a^2)}\geq\frac{ab\,(a-b)^2\left(c^2+ac+bc+ab\right)}{(b+c)\,(c+a)\,(b^2+c^2)\,(c^2+a^2)}=$$
$$=\frac{ab\,(a-b)^2\,(b+c)\,(c+a)}{(b+c)\,(c+a)\,(b^2+c^2)\,(c^2+a^2)}=\frac{ab\,(a-b)^2}{(b^2+c^2)\,(c^2+a^2)}.$$

Obţinem următoarea rafinare a inegalităţii în discuţie:

$$\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}-\frac{a}{b+c}-\frac{b}{c+a}-\frac{c}{a+b}\geq$$
$$\geq\frac{ab\,(a-b)^2}{(b^2+c^2)\,(c^2+a^2)}+\frac{bc\,(b-c)^2}{(c^2+a^2)\,(a^2+b^2)}+\frac{ca\,(c-a)^2}{(a^2+b^2)\,(b^2+c^2)}.$$

În încheiere, propunem cititorilor demonstrarea şi, eventual, rafinarea următoarelor inegalităţi:

4. $\dfrac{x^{n+1}}{y+z}+\dfrac{y^{n+1}}{z+x}+\dfrac{z^{n+1}}{x+y}\geq\dfrac{x^n+y^n+z^n}{2},\ \ x,y,z>0,\ n\in\mathbb{N}.$

5. a, b, c fiind laturile unui triunghi, are loc inegalitatea

$$\frac{ab}{a+b-c}+\frac{bc}{b+c-a}+\frac{ca}{c+a-b}\geq a+b+c.$$

Gabriel Dospinescu

Indicaţie. $\dfrac{ab}{a+b-c}-\dfrac{a+b}{2}=\ldots$ etc.

6. a, b, c fiind laturile unui triunghi, avem

$$\frac{b^2+c^2}{a^3+abc}+\frac{c^2+a^2}{b^3+abc}+\frac{a^2+b^2}{c^3+abc}\geq\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}.$$

Titu Zvonaru şi Bogdan Ioniţă

Indicaţie. $\dfrac{b^2+c^2}{a^3+abc}-\dfrac{1}{2ab}-\dfrac{1}{2ac}=\ldots$ etc.

Bibliografie

1. **C. Lupu** - *Asupra inegalităţii lui Gerretsen*, R.M.T., 4/2006, 3-100.
2. **T. Zvonaru** - *Inegalităţi ligamentate şi neligamentate*, Arhimede, 5-6/2003, 8-16.
