O caracterizare a punctului Mathot

Cătălin ŢIGĂERU[1]

Punctul lui Mathot (sau anticentrul) unui patrulater inscriptibil este definit ca punctul de intersecţie al perpendicularelor duse din mijlocul fiecărei laturi ale patrulaterului pe latura opusă. Numeroase proprietăţi ale acestui punct au fost puse în evidenţă, cele mai spectaculoase fiind în legătură cu cele patru triunghiuri formate de câte două laturi adiacente ale patrulaterului şi câte o diagonală.

În această notă punem în evidenţă o caracterizare a punctului Mathot care se referă la cele patru triunghiuri formate de câte o latură şi câte două segmente determinate pe diagonale de punctul lor de intersecţie. Mai precis, demonstrăm

Teorema 1. *Se consideră patrulaterul inscriptibil $ABCD$, înscris în cercul de centru O, în care se notează cu E intersecţia diagonalelor AC şi BD şi cu H_1, H_2, H_3, H_4 ortocentrele triunghiurilor AEB, BEC, CED şi respectiv DEA. Atunci:*

(a) Patrulaterul $H_1H_2H_3H_4$ este paralelogram.

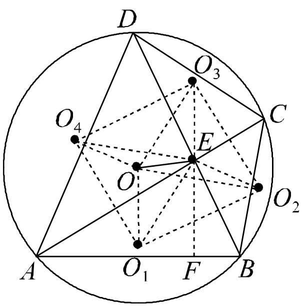
(b) Intersecţia diagonalelor paralelogramului $H_1H_2H_3H_4$ coincide cu punctul Mathot al patrulaterului $ABCD$.

Pentru demonstraţie folosim

Lema 1. *Dacă O_1, O_2, O_3, O_4 sunt centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor AEB, BEC, CED şi respectiv DEA, atunci*

(a) Patrulaterul $O_1O_2O_3O_4$ este paralelogram.

(b) Dacă Γ este punctul de intersecţie a diagonalelor paralelogramului $O_1O_2O_3O_4$, atunci punctele O, Γ, E sunt coliniare, punctul Γ fiind mijlocul segmentului $[OE]$.



Demonstraţie. Cititorul poate verifica imediat faptul că patrulaterul $O_1O_2O_3O_4$ este paralelogram. Notăm cu F piciorul perpendicularei din E pe AB şi unim E cu O_3. Pe de o parte avem $m(\widehat{FEA}) = 90° - m(\widehat{BAE})$; pe de altă parte $m(\widehat{CEO_3}) = 90° - m(\widehat{CDE})$; cum $m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{CDE})$, rezultă că $m(\widehat{FEA}) = m(\widehat{CEO_3})$, adică F, E, O_3 sunt coliniare, deci $EO_3 \perp AB$, deci $O_3E \parallel OO_1$; analog se demonstrează că $O_1E \parallel OO_3$, $O_4E \parallel OO_2$, $O_2E \parallel OO_4$, de unde rezultă că patrulaterele O_1EO_3O, O_2EO_4O sunt paralelograme. Cum diagonalele paralelogramelor se înjumătăţesc, rezultă că punctul Γ este mijlocul segmentului $[OE]$.

Demonstraţia Teoremei 1. Vom folosi şi următoarele rezultate:

(A) Dacă $UVWZ$ este un paralelogram, S este intersecţia diagonalelor sale şi M este un punct oarecare din plan, atunci $4\overrightarrow{MS} = \overrightarrow{MU} + \overrightarrow{MV} + \overrightarrow{MW} + \overrightarrow{MZ}$;

(B) (Sylvester) Dacă M este centrul cercului circumscris triunghiului UVW şi dacă S este ortocentrul triunghiului, atunci $\overrightarrow{MS} = \overrightarrow{MU} + \overrightarrow{MV} + \overrightarrow{MW}$;

(C) Dacă $ABCD$ este inscriptibil, dacă O este centrul cercului circumscris şi dacă Ω este punctul Mathot al patrulaterului, atunci

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{O\Omega}. \tag{1}$$

[1] Lect. dr., Univ. "Ştefan cel Mare", Suceava

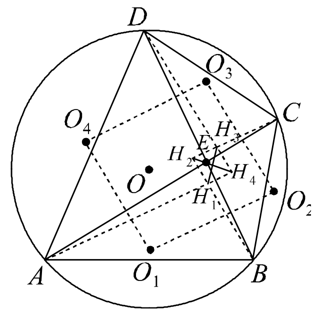
Se demonstrează imediat că $H_1H_2H_3H_4$ este paralelogram. Putem scrie: $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OO_4} + \overrightarrow{O_4A} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1A}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1B} = \overrightarrow{OO_2} + \overrightarrow{O_2B}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OO_2} + \overrightarrow{O_2C} = \overrightarrow{OO_3} + \overrightarrow{O_3C}$, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OO_3} + \overrightarrow{O_3D} = \overrightarrow{OO_4} + \overrightarrow{O_4D}$, de unde, prin însumare, obţinem:

$$2\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right) = 2\left(\overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{OO_2} + \overrightarrow{OO_3} + \overrightarrow{OO_4}\right) +$$
$$+\left(\overrightarrow{O_1A} + \overrightarrow{O_1B} + \overrightarrow{O_1E}\right) + \left(\overrightarrow{O_2B} + \overrightarrow{O_2C} + \overrightarrow{O_2E}\right) + \left(\overrightarrow{O_3C} + \overrightarrow{O_3D} + \overrightarrow{O_3E}\right) +$$
$$+\left(\overrightarrow{O_4D} + \overrightarrow{O_4A} + \overrightarrow{O_4E}\right) + \overrightarrow{EO_1} + \overrightarrow{EO_2} + \overrightarrow{EO_3} + \overrightarrow{EO_4} \overset{(B)}{=}$$
$$= 2\sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{OO_i} + \sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{O_iH_i} + \sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{EO_i} = \sum_{i=1}^{4}\left(\overrightarrow{OO_i} + \overrightarrow{O_iH_i}\right) + \sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{OO_i} + \sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{EO_i} =$$
$$= (A) + lema = \sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{OH_i} + 4\overrightarrow{O\Gamma} + 4\overrightarrow{E\Gamma}.$$

Conform lemei, rezultă că $\overrightarrow{O\Gamma} + \overrightarrow{E\Gamma} = \bar{0}$. Dacă notăm cu Ω' punctul de intersecţie a diagonalelor paralelogramului $H_1H_2H_3H_4$ şi, ţinând cont din nou de (A), avem $\sum\limits_{i=1}^{n} OH_i = 4O\Omega'$. Ca urmare, obţinem

$$2\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right) = 4\overrightarrow{O\Omega'}. \tag{2}$$

Din (1) şi (2) obţinem că $4\overrightarrow{O\Omega} = 4\overrightarrow{O\Omega'}$, de unde deducem că $\Omega \equiv \Omega'$ şi teorema este demonstrată. (Cele spuse se pot urmări pe figura alăturată.)



O consecinţă imediată a teoremei este şi relaţia vectorială

$$\sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{O_iH_i} = 4\overrightarrow{\Gamma\Omega}, \tag{3}$$

care se deduce imediat folosind (A).

Este posibil ca rezultatul notei să nu fie nou, dar sigur nu este trecut, de exemplu, printre proprietăţile punctului Mathot, demonstrate în capitolul consacrat subiectului, din monografia "Problems in plane and solid geometry", scrisă de Viktor Prasolov, care este accesibilă pe Internet. Precizăm că autorul nu a găsit rezultatul nici în cărţile citate în bibliografie, nici în alte cărţi clasice de geometrie, scrise în limba română.

Bibliografie

1. **D. Mihalcea, I. Chiţescu, M. Chiriţă** - *Geometria patrulaterului*, Ed. Teora, Seria Bacalaureat-Admitere, nr. 24, 1998.
2. **C. Mihalescu** - *Geometria elementelor remarcabile*, Bibl. Soc. Şt. Matematice a S.S.M.R., Ed. Tehnică, Bucureşti, 2007.