O rafinare a inegalităţii lui Jensen

Florin POPOVICI[1]

Cu o demonstraţie simplă, stabilim un criteriu de monotonie a funcţiilor; ca aplicaţie, prezentăm o rafinare a inegalităţii lui Jensen, despre care credem că este nouă.

1. Preliminarii. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, cu $a < b$. Se stabileşte în mod obişnuit

Propoziţia 1 (de tip Fermat). *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie dată. Dacă $x_0 \in [a, b)$ este un punct de maxim local (respectiv de minim local) al funcţiei f şi f are derivată la dreapta în $\overline{\mathbb{R}}$ în punctul x_0, atunci $f'_+(x_0) \leq 0$ (respectiv $f'_+(x_0) \geq 0$).*

Propoziţia 2 (de tip Rolle). *Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă pe $[a, b]$, care are derivată la dreapta în $\overline{\mathbb{R}}$ pe $[a, b)$ şi*

$$f(a) = f(b), \tag{1}$$

atunci există $c_1, c_2 \in [a, b)$, astfel încât

$$f'_+(c_1) \leq 0 \leq f'_+(c_2). \tag{2}$$

Demonstraţie. Presupunem că f nu-i constantă (cazul contrar fiind banal). Conform teoremei de mărginire a funcţiilor continue a lui Weierstrass, există $c_1, c_2 \in [a, b]$, încât $f(c_1) = \max\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ şi $f(c_2) = \min\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$. Din (1) rezultă că putem alege $c_1, c_2 \in [a, b)$. Conform Propoziţiei 1, rezultă că are loc (2).

Propoziţia 3 (de tip Lagrange). *Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă pe $[a, b]$, care are derivată la dreapta în $\overline{\mathbb{R}}$ pe $[a, b)$, atunci există $c_1, c_2 \in [a, b)$ încât*

$$f'_+(c_1) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'_+(c_2).$$

Demonstraţie. Aplicăm Propoziţia 2 funcţiei $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, definită prin

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x, \quad \forall x \in [a, b].$$

Propoziţia 4 (criteriu de monotonie). *Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă pe $(a, b]$, care are derivată la dreapta în $\overline{\mathbb{R}}$ pe $[a, b)$ şi*

$$f'_+(x) \geq 0, \quad \forall x \in [a, b), \tag{3}$$

atunci funcţia f este crescătoare.

Demonstraţie. Fie $x_1, x_2 \in (a, b]$, cu $x_1 < x_2$. Conform Propoziţiei 3 , aplicate restricţiei $f\Big|_{(a,b]}$, există $c_1 \in [x_1, x_2)$, astfel încât $f'_+(c_1) \leq \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, de unde $0 \leq f(x_2) - f(x_1)$, adică $f\Big|_{(a,b]}$ este crescătoare. Urmează că $\exists \lim\limits_{x \searrow a} f(x) = l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Conform ipotezei (3), avem $f'_+(a) \geq 0$. Rezultă că $f(a) \leq l$. Urmează că avem $f(a) \leq f(x)$, $\forall x \in (a, b]$, deci funcţia f este crescătoare.

2. Rezultatul principal. Putem acum stabili următoarea

Teoremă. *Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval dat. Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie convexă, atunci pentru orice $a_1, \ldots, a_n \in I$, cu $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ şi pentru orice $p_1, \ldots, p_n \in$*

[1] Prof. dr., Colegiul Naţional "Gr. Moisil", Braşov

$(0,\infty)$, *are loc inegalitatea lui Jensen rafinată:*

$$\begin{aligned}
&\frac{p_1 f(a_1)+\cdots+p_n f(a_n)}{p_1+\cdots+p_n}-f\left(\frac{p_1 a_1+\ldots p_n a_n}{p_1+\cdots+p_n}\right)\geq \\
&\geq \frac{(p_1+p_2) f(a_2)+\cdots+p_n f(a_n)}{p_1+\cdots+p_n}-f\left(\frac{(p_1+p_2) a_2+\cdots+p_n a_n}{p_1+\cdots+p_n}\right)\geq\cdots\geq \qquad (4)\\
&\geq \frac{(p_1+\cdots+p_{n-1}) f(a_{n-1})+p_n f(a_n)}{p_1+\cdots+p_n}-f\left(\frac{(p_1+\cdots+p_{n-1}) a_{n-1}+p_n a_n}{p_1+\cdots+p_n}\right)\geq 0.
\end{aligned}$$

Demonstraţie. Stabilim prima inegalitate din (4). Dacă $a_1=a_2$, atunci prima inegalitate din (4) are loc cu egalitate. Dacă $a_2=a_n$, atunci prima inegalitate din (4) rezultă direct din definiţia convexităţii. Considerăm cazul $a_1<a_2<a_n$. Fie $g: I\to\mathbb{R}$ funcţia definită prin

$$g(x)=\frac{p_1 f(x)+p_2 f(a_2)+\cdots+p_n f(a_n)}{p_1+\cdots+p_n}-f\left(\frac{p_1 x+p_2 a_2+\cdots+p_n a_n}{p_1+\cdots+p_n}\right), \quad \forall x\in I.$$

Deoarece funcţia f este convexă rezultă (a se vedea [**1**], §1.3) că funcţia f este continuă pe $(a_1,a_2]$, este derivabilă la dreapta pe (a_1,a_2), are derivată la dreapta în a_1, $f'_+(a_1)\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ şi derivata $f'_+:[a_1,a_2)\to\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ este funcţie crescătoare. Urmează că funcţia g este continuă pe $(a_1,a_2]$, este derivabilă la dreapta pe (a_1,a_2), are derivată la dreapta în a_1 (în $\overline{\mathbb{R}}$) şi avem

$$g'_+(x)=\frac{p_1}{p_1+\cdots+p_n}\left(f'_+(x)-f'_+\left(\frac{p_1 x+p_2 a_2+\cdots+p_n a_n}{p_1+\cdots+p_n}\right)\right), \quad \forall x\in[a_1,a_2).$$

Deoarece

$$x\in[a_1,a_2)\Rightarrow x<\frac{p_2 a_2+\cdots+p_n a_n}{p_2+\cdots+p_n}\Rightarrow x<\frac{p_1 x+p_2 a_2+\cdots+p_n a_n}{p_1+\cdots+p_n},$$

rezultă că $g'_+(x)\leq 0$, $\forall x\in[a_1,a_2)$. Conform Propoziţiei 4, aplicată restricţiei $g\big|_{[a_1,a_2]}$, rezultă că funcţia $g\big|_{[a_1,a_2]}$ este descrescătoare. Urmează că avem $g(a_1)\geq g(a_2)$, care este prima inegalitate din (4).

Prin inducţie finită descendentă se obţin şi celelalte inegalităţi din (4); ultima inegalitate din (4) se obţine direct din definiţia convexităţii.

Observaţia 1. În particular, din (4) se obţine inegalitatea lui Jensen

$$f\left(\frac{p_1 a_1+\cdots+p_n a_n}{p_1+\cdots+p_n}\right)\leq\frac{p_1 f(a_1)+\cdots+p_n f(a_n)}{p_1+\cdots+p_n}.$$

Observaţia 2. Criteriul de monotonie de mai sus (Propoziţia 4) este eficient în diferite situaţii. De exemplu, pe baza lui poate fi obţinută o rafinare a inegalităţii lui Tiberiu Popovici (a se vedea [**2**]).

Bibliografie

1. **C. P. Niculescu, L. E. Persson** - *Convex Functions and Their Applications. A Contemporary Approach*, CMS Books in Mathematics, vol. 23, Springer-Verlag, New York, 2006.
2. **C. P. Niculescu, F. Popovici** - *A Refinement of Popoviciu's Inequality*, Bull. Soc. Sci. Math. Roum. 49 (97), No.3, 285-290.