Unsprezece pătrate perfecte

Dan POPESCU[1]

Scopul acestei note este **determinarea numerelor naturale în baza zece de forma** $\overline{\underbrace{aa\ldots a}_{n \text{ cifre}}b\underbrace{cc\ldots c}_{n \text{ cifre}}d}$**,** $n \in \mathbb{N}^*$**, care, pentru orice număr natural** n**, sunt pătrate perfecte**.

Se va vedea că rezultatul obţinut are drept consecinţe un număr mare de probleme publicate în reviste de specialitate destinate elevilor (de gimnaziu).

Din modul cum s-a formulat problema, rezultă că pătratele perfecte căutate se găsesc printre cele ce corespund unei valori particulare a lui n. Pentru $n = 4$ se găsesc, cu ajutorul calculatorului următoarele 11 pătrate perfecte de forma dorită:

$$
\begin{array}{rll}
1) & 1111022224 = 33332^2; & a = 1, b = 0, c = 2, d = 4,\\
2) & 1111088889 = 33333^2; & a = 1, b = 0, c = 8, d = 9,\\
3) & 1111155556 = 33334^2; & a = 1, b = 1, c = 5, d = 6,\\
4) & 1111222225 = 33335^2; & a = 1, b = 2, c = 2, d = 5,\\
5) & 4444222225 = 66665^2; & a = 4, b = 2, c = 2, d = 5,\\
6) & 4444355556 = 66666^2; & a = 4, b = 3, c = 5, d = 6,\\
7) & 4444488889 = 66667^2; & a = 4, b = 4, c = 8, d = 9,\\
8) & 4444622224 = 66668^2; & a = 4, b = 6, c = 2, d = 4,\\
9) & 9999400009 = 99997^2; & a = 9, b = 4, c = 0, d = 9,\\
10) & 9999600004 = 99998^2; & a = 9, b = 6, c = 0, d = 4,\\
11) & 9999800001 = 99999^2; & a = 9, b = 8, c = 0, d = 1.
\end{array}
$$

Vom arăta că există exact 11 numere de forma $\overline{\underbrace{aa\ldots a}_{n}b\underbrace{cc\ldots c}_{n}d}$ care sunt pătrate perfecte pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, anume, acelea ce se scriu cu sistemele de cifre (a, b, c, d) pe care le-am întâlnit mai sus (în cazul $n = 4$), adică

$$
\begin{array}{rlrl}
(1) & \overline{\underbrace{11\ldots1}_{n}0\underbrace{22\ldots2}_{n}4} = \overline{\underbrace{33\ldots3}_{n}2}^2, & (7) & \overline{\underbrace{44\ldots4}_{n+1}\underbrace{88\ldots8}_{n}9} = \overline{\underbrace{66\ldots6}_{n}7}^2,\\
(2) & \overline{\underbrace{11\ldots1}_{n}0\underbrace{88\ldots8}_{n}9} = \overline{\underbrace{33\ldots3}_{n+1}}^2, & (8) & \overline{\underbrace{44\ldots4}_{n}6\underbrace{22\ldots2}_{n}4} = \overline{\underbrace{66\ldots6}_{n}8}^2,\\
(3) & \overline{\underbrace{11\ldots1}_{n+1}\underbrace{55\ldots5}_{n}6} = \overline{\underbrace{33\ldots3}_{n}4}^2, & (9) & \overline{\underbrace{99\ldots9}_{n}4\underbrace{00\ldots0}_{n}9} = \overline{\underbrace{99\ldots9}_{n}7}^2,\\
(4) & \overline{\underbrace{11\ldots1}_{n}\underbrace{22\ldots2}_{n+1}5} = \overline{\underbrace{33\ldots3}_{n}5}^2, & (10) & \overline{\underbrace{99\ldots9}_{n}6\underbrace{00\ldots0}_{n}4} = \overline{\underbrace{99\ldots9}_{n}8}^2,\\
(5) & \overline{\underbrace{44\ldots4}_{n}\underbrace{22\ldots2}_{n+1}5} = \overline{\underbrace{66\ldots6}_{n}5}^2, & (11) & \overline{\underbrace{99\ldots9}_{n}8\underbrace{00\ldots0}_{n}1} = \overline{\underbrace{99\ldots9}_{n+1}}^2.\\
(6) & \overline{\underbrace{44\ldots4}_{n}3\underbrace{55\ldots5}_{n}6} = \overline{\underbrace{66\ldots6}_{n+1}}^2, & &
\end{array}
$$

[1] Profesor, Colegiul Naţional "Ştefan cel Mare", Suceava

În scopul propus, să notăm $x_n = \overline{\underbrace{aa\ldots a}_{n}b\underbrace{cc\ldots c}_{n}d}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Putem scrie

$$x_n = \underbrace{\overline{aa\ldots a}}_{n+1} \cdot 10^{n+1} - a \cdot 10^{n+1} + b \cdot 10^{n+1} + \underbrace{\overline{cc\ldots c}}_{n+1} + d - c =$$

$$= \underbrace{\overline{aa\ldots a}}_{n+1} \cdot \left(10^{n+1} - 1\right) + (b-a)\left(10^{n+1} - 1\right) + \underbrace{\overline{aa\ldots a}}_{n+1} + \underbrace{\overline{cc\ldots c}}_{n+1} + d - c + b - a,$$

adică

$$x_n = 9a\underbrace{\overline{11\ldots 1}}_{n+1}^{\,2} + (9b + c - 8a) \cdot \underbrace{\overline{11\ldots 1}}_{n+1} + b + d - a - c, \quad n \in \mathbb{N}^*. \qquad (*)$$

Acum, să observăm că în $(*)$ coeficienţii $9a$, $9b + c - 8a$ şi $b + d - a - c$ sunt aceiaşi pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ (ei reflectând numai forma lui x_n). Ca urmare dacă trinomul din membrul doi este pătrat perfect pentru o valoare particulară a lui n, atunci va avea această proprietate pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Acest fapt verificându-se direct pentru $n = 4$, vom deduce că numerele $(1) - (11)$ sunt cele căutate.

Observaţia 1. *i*) Cititorul poate observa că, pentru $1 \leq n \leq 3$, există pătrate perfecte de forma $\overline{\underbrace{aa\ldots a}_{n}b\underbrace{cc\ldots c}_{n}d}$ care nu apar printre cele unsprezece. Un exemplu pentru $n = 2$: $344^2 = 118336$. Mai precis, pentru $n = 2$, există 18 pătrate perfecte de forma enunţată, iar pentru n = 3, numărul lor este 12. În cazul $n = 1$, numărul lor este mult mai mare, căci problema se reduce la identificarea pătratelor perfecte cu patru cifre ale sistemului zecimal.

ii) Elevul *Aursulesei Tudor*, căruia îi mulţumim şi cu acest prilej, a verificat prin intermediul calculatorului faptul că, pentru $4 \leq n \leq 14$, singurele pătrate perfecte de forma $\overline{\underbrace{aa\ldots a}_{n}b\underbrace{cc\ldots c}_{n}d}$ sunt exact cele unsprezece prezentate mai sus.

Observaţia 2. *i*) Singurele pătrate perfecte de forma $\overline{\underbrace{aa\ldots a}_{n+1}\underbrace{bb\ldots b}_{n}c}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ sunt: $\overline{\underbrace{11\ldots 1}_{n+1}\underbrace{55\ldots 5}_{n}6}$, $n \in \mathbb{N}^*$ şi $\overline{\underbrace{44\ldots 4}_{n+1}\underbrace{88\ldots 8}_{n}9}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

ii) Singurul pătrat perfect de forma $\overline{\underbrace{aa\ldots a}_{n}\underbrace{bb\ldots b}_{n+1}c}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ este $\overline{\underbrace{44\ldots 4}_{n}\underbrace{22\ldots 2}_{n+1}5}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Aplicaţii

1. *Să se arate că numărul* $N = \overline{\underbrace{11\ldots 1}_{1997}\underbrace{22\ldots 2}_{1998}5}$ *este pătrat perfect* (OBM - juniori, Atena, 1998) [**1**].

Este un caz particular al rezultatului (4); $N = \overline{\underbrace{33\ldots 3}_{1997}5}^{\,2}$.

2. *Să se determine cifrele* x *şi* y, $x \neq 0$, *dacă* $\overline{\underbrace{xx\ldots x}_{n}6\underbrace{yy\ldots y}_{n}4}$ *este pătrat perfect, pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$.

Rezolvarea problemei decurge din (8) şi (10), deci avem $(x, y) \in \{(4, 2), (9, 0)\}$.

3. *Nu există pătrate perfecte în baza zece de forma* $\overline{\underbrace{aa\ldots a}_{n}}$; $a \neq 0$, $n \geq 2$.

Rezultă din cele prezentate mai sus; o altă abordare poate fi găsită în [**3**].

4. Rezultatele de la (3) şi (7) sunt prezente în [**3**].

5. *Să se arate că numerele* $a = \overline{\underbrace{11\ldots 1}_{2n}} - \overline{\underbrace{22\ldots 2}_{n}}$ *şi* $b = \overline{\underbrace{44\ldots 4}_{2n}} - \overline{\underbrace{88\ldots 8}_{n}}$ *sunt pătrate perfecte,* $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Se arată că $a = \overline{\underbrace{11\ldots 1}_{n-1}0\underbrace{88\ldots 8}_{n-1}9}$ şi se aplică (2), iar $b = \overline{\underbrace{44\ldots 4}_{n-1}3\underbrace{55\ldots 5}_{n-1}6}$ şi se aplică (6).

6. *Să se arate că există o infinitate de numere cu terminaţia* 0004 *care sunt patrate perfecte.*

Se poate utiliza egalitatea (10).

7. *Este numărul* $a = \sqrt{\overline{\underbrace{44\ldots 4}_{2007}3\underbrace{55\ldots 5}_{2007}6}}$ *natural?* (**P. Bătrîneţu** - ONM (lista scurtă), Piteşti, ediţia 2007 [**6**]).

Observaţia 3. *i*) În lista scurtă cu problemele propuse la Olimpiada Naţională de Matematică, ediţia 2005 [**6**], **E. Velcea** a propus problema care face obiectul rezultatului de la (6).

ii) Rezultatul de la (4) a constituit o problemă de la *Concursul Interjudeţean "Gh. Ţiţeica"*, ediţia 2004.

iii) Autorul acestei note nu a identificat enunţuri legate de rezultatele de la (1), (9) şi (11).

În final, propunem următorul exerciţiu (poate cu o alta abordare):

Să se arate că nu există numere în baza zece cu scrierea poziţională $\overline{\underbrace{aa\ldots a}_{n}\underbrace{bb\ldots b}_{n}}$, *care, pentru ficare număr natural nenul n, să fie pătrate perfecte.*

Bibliografie

1. **D. Brînzei** ş.a. - *10 ani de Olimpiade Balcanice ale Juniorilor*, Paralela 45, 2007.
2. **N.B. Vasiliev, A.A. Egorov** - *Zadaci vsesoiuznîi matematiceskih olimpiad-ebvisa*, Nauka, Moscova, 1988.
3. **A.P. Ghioca, L.A. Cojocaru** - *Matematica gimnazală dincolo de manual*, Gil, Zalău, 2005.
4. **I. Cucurezeanu** - *Pătrate şi cuburi perfecte de numere întregi*, Gil, Zalău, 2007.
5. *Gazeta Matematică*, Seria B, nr. 12/2005, Problema E:13095.
6. *Romanian Mathematical Competitions*, Theta, Bucureşti, 2005.
7. *Romanian Mathematical Competitions*, Theta, Bucureşti, 2007.