Asupra unor inegalităţi geometrice

Gheorghe IUREA[1]

Rezultatul principal al notei [**1**] este următoarea

Propoziţie. *Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi; atunci, pentru orice* $x \geq 0$*, au loc inegalităţile:*

$$(a+b+c)^3 (x+1)^3 \geq 27 \left[(a-b)(1-x) + c(1+x)\right]\left[(b-c)(1-x) + a(1+x)\right] \cdot$$
$$\cdot \left[(c-a)(1-x) + b(1+x)\right], \qquad (1)$$

$$\frac{(a+b-c)\,x + b+c-a}{\sqrt{(ax+b)(bx+c)}} + \frac{(b+c-a)\,x + c+a-b}{\sqrt{(bx+c)(cx+a)}} + \frac{(c+a-b)\,x + a+b-c}{\sqrt{(cx+a)(ax+b)}} \leq 3, \qquad (2)$$

$$\frac{(b+c)\,x + a + c}{\sqrt{ax+b}} + \frac{(c+a)\,x + b + a}{\sqrt{bx+c}} + \frac{(a+b)\,x + c + b}{\sqrt{cx+a}} \geq$$
$$\geq 2\left(\sqrt{ax+b} + \sqrt{bx+c} + \sqrt{cx+a}\right), \qquad (3)$$

În cele ce urmează, vom demonstra că inegalităţile (1), (2) şi (3) au loc pentru orice a, b, c numere reale pozitive.

Cu substituţiile $\alpha = (a-b)(1-x) + c(1+x)$, $\beta = (b-c)(1-x) + a(1+x)$ şi $\gamma = (c-a)(1-x) + b(1+x)$, observând că $\alpha + \beta + \gamma = (a+b+c)(1+x)$, inegalitatea (1) se scrie sub forma $(\alpha+\beta+\gamma)^3 \geq 27\alpha\beta\gamma \quad (1')$. Dacă $\alpha\beta\gamma < 0$, atunci $(1')$ este evidentă. Dacă $\alpha\beta\gamma \geq 0$, cum $\alpha+\beta$, $\beta+\gamma$ şi $\gamma+\alpha$ sunt nenegative, rezultă că α, β, γ sunt nenegative şi atunci $(1')$ urmează imediat din *inegalitatea mediilor* ($MA \geq MG$). Egalitatea se atinge pentru $a = b = c$ şi $x \in [0, \infty)$ oarecare.

Notând $ax + b = \alpha^2$, $bx + c = \beta^2$, $cx + a = \gamma^2$, cu $\alpha, \beta, \gamma > 0$, inegalitatea (2) devine

$$\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{\alpha\beta} + \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{\beta\gamma} + \frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{\alpha\gamma} \leq 3$$

care, după calcule, poate fi scrisă sub forma

$$\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma) + \beta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma) + \gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) \geq 0.$$

Aceasta este însă cunoscuta *inegalitate Schur*. Egalitatea se atinge când $a = b = c$.

Folosind aceleaşi substituţii, inegalitatea (3) este echivalentă cu

$$\frac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha} + \frac{\alpha^2+\beta^2}{\gamma} + \frac{\alpha^2+\gamma^2}{\beta} \geq 2(\alpha+\beta+\gamma),$$

care rezultă prin sumarea inegalităţilor $\dfrac{\beta^2}{\alpha} + \dfrac{\alpha^2}{\gamma} + \dfrac{\gamma^2}{\beta} \geq \alpha+\beta+\gamma$ şi $\dfrac{\gamma^2}{\alpha} + \dfrac{\beta^2}{\gamma} + \dfrac{\alpha^2}{\beta} \geq \alpha+\beta+\gamma$. Egalitatea are loc pentru $a = b = c$.

Bibliografie

1. **I. V. Maftei, M. Haivas** - *Tehnici de stabilire a unor inegalităţi geometrice*, Recreaţii Matematice 1/2008, 22-23.

[1] Profesor, Liceul Teoretic "Dimitrie Cantemir", Iaşi