Cercuri semiînscrise
şi puncte de tip Gergonne sau Nagel

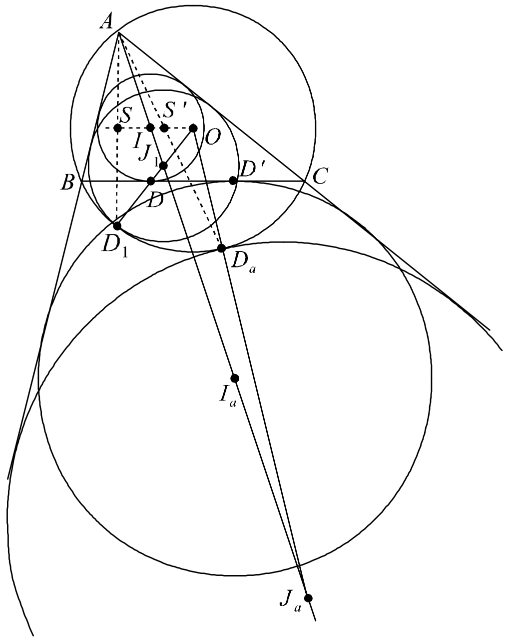
Temistocle BÎRSAN[1]

Fie ABC un triunghi oarecare. Pentru cercurile circumscris, înscris, A-exînscris etc. folosim notaţiile uzuale: $\mathcal{C}\,(0,R)$, $\mathcal{C}\,(I,r)$, $\mathcal{C}\,(I_a,r_a)$ etc. Punctele de tangenţă a dreptei BC cu cercurile $\mathcal{C}\,(I,r)$ şi $\mathcal{C}\,(I_a,r_a)$ se notează D şi D'; cu E, E' şi F, F' notăm punctele cu semnificaţii similare relativ la dreptele CA şi, respectiv, AB.

Este cunoscut faptul că *dreptele AD, BE şi CF sunt concurente* (într-un punct Γ – *punctul lui Gergonne*) şi, de asemenea, faptul că *dreptele AD', BE' şi CF' sunt concurente* (într-un punct N – *punctul lui Nagel*).

Se asociază triunghiului ABC trei *cercuri semiînscrise*: $\mathcal{C}\,(J_1,\rho_1)$, $\mathcal{C}\,(J_2,\rho_2)$, $\mathcal{C}\,(J_3,\rho_3)$ ($\mathcal{C}\,(J_1,\rho_1)$ fiind cercul tangent dreptelor AB şi AC şi tangent interior cercului circumscris triunghiului etc.), precum şi trei *cercuri ex-semiînscrise*: $\mathcal{C}\,(J_a,\rho_a)$, $\mathcal{C}\,(J_b,\rho_b)$, $\mathcal{C}\,(J_c,\rho_c)$ ($\mathcal{C}\,(J_a,\rho_a)$ fiind cercul tangent dreptelor AB şi AC şi tangent exterior cercului $\mathcal{C}\,(O,R)$ etc.). Observăm că avem un singur cerc înscris, dar trei cercuri semiînscrise; pe de altă parte, numărul cercurilor exînscrise este egal cu cel al celor ex-semiînscrise. Privitor la cercurile semiînscrise, un număr de proprietăţi ale lor sunt date în [**3**] şi [**1**].

Ne propunem în această Notă să "trecem" cele două rezultate mai sus menţionate la cercurile semiînscrise şi ex-semiînscrise.



În scopul propus, să notăm D_1 şi D_a punctele de tangenţă a cercurilor $\mathcal{C}\,(J_1,\rho_1)$ şi, respectiv, $\mathcal{C}\,(J_a,\rho_a)$ cu $\mathcal{C}\,(O,R)$; E_1, E_b şi F_1, F_c au semnificaţii analoage.

Odată cu trecerea de la cercul $\mathcal{C}\,(I,r)$ la cele trei cercuri semiînscrise $\mathcal{C}\,(J_i,\rho_i)$ $(i = 1,2,3)$, este firesc să considerăm în rolul cevienelor Gergonne AD, BE şi CF cevienele AD_1, BE_1 şi, respectiv, CF_1. Similar, în locul cevienelor Nagel AD', BE' şi CF' să considerăm cevienele AD_a, BE_b şi, respectiv, CF_c legate de cercurile ex-semiînscrise $\mathcal{C}\,(J_a,\rho_a)$ etc.

Vom arăta că rezultatelor clasice de mai sus le corespund cele din următoarea

Teoremă. *a) Cevienele AD_1, BE_1 şi CF_1 sunt concurente în centrul S al omotetiei directe a cercurilor $\mathcal{C}\,(O,R)$ şi $\mathcal{C}\,(I,r)$.*

---

[1] Prof. dr., Universitatea Tehnică "Gh. Asachi", Iaşi

b) Cevienele AD_a, BE_b şi CF_c sunt concurente în centrul S' al omotetiei inverse a cercurilor $\mathcal{C}(O,R)$ şi $\mathcal{C}(I,r)$.

Demonstraţie. *a*) Evident, omotetia H_A^k, cu $k = \dfrac{\rho_1}{r}$, transformă cercul $\mathcal{C}(I,r)$ în $\mathcal{C}(J_1,\rho_1)$, pe când omotetia $H_{D_1}^{k'}$, cu $k' = \dfrac{R}{\rho_1}$, transformă $\mathcal{C}(J_1,\rho_1)$ în $\mathcal{C}(O,R)$. Ca urmare, produsul $H_{D_1}^{k'} \circ H_A^k$ are centrul pe AD_1 şi raportul $kk' = \dfrac{\rho_1}{r} \cdot \dfrac{R}{\rho_1} = \dfrac{R}{r}$. Cum transformă $\mathcal{C}(I,r)$ în $\mathcal{C}(O,R)$, acest produs coincide cu omotetia directă a acestor cercuri. În consecinţă, AD_1 trece prin S – centrul omotetiei directe a cercurilor $\mathcal{C}(I,r)$ şi $\mathcal{C}(O,R)$ (situat pe OI şi definit de relaţia $\overline{SO} = \dfrac{R}{r}\overline{SI}$). Similar se arată că dreptele BE_1 şi CF_1 trec prin S.

b) Se procedează la fel. H_A^t, cu $t = \dfrac{\rho_a}{r}$, transformă $\mathcal{C}(I,r)$ în $\mathcal{C}(J_a,\rho_a)$, iar $H_{D_a}^{t'}$, cu $t' = -\dfrac{R}{\rho_a}$, transformă $\mathcal{C}(J_a,\rho_a)$ în $\mathcal{C}(O,R)$. Omotetia produs $H_{D_a}^{t'} \circ H_A^t$, cu raportul $tt' = -\dfrac{R}{r}$, coincide cu omotetia inversă a cercurilor $\mathcal{C}(I,r)$ şi $\mathcal{C}(O,R)$. AD_a conţine centrul S' al acestei din urmă omotetii (situat pe OI şi determinat de $\overline{S'O} = -\dfrac{R}{r}\overline{S'I}$). Se arată similar că şi BE_b, CF_c trec prin S'. Q.e.d.

Observaţia 1. Demonstraţia standard pentru concurenţa cevienelor Gergonne (sau Nagel) se bazează pe reciproca teoremei lui Ceva. Acest instrument poate fi utilizat şi pentru stabilirea afirmaţiilor *a*) şi *b*), dar cu preţul unor calcule laborioase. Astfel, dacă notăm $X = BC \cap AD_1$, se găseşte că $\dfrac{BX}{XC} = \dfrac{c^2}{b^2} \cdot \dfrac{p-b}{p-c}$ $(2p = a+b+c)$. Această relaţie şi cu analoagele ei fac posibilă aplicarea reciprocei teoremei lui Ceva şi, deci, dovedirea concurenţei dreptelor AD_1, BE_1, CF_1. Faptul că S este punctul lor de concurenţă devine o chestiune de rutină, care cere noi calcule; de exemplu, se poate utiliza Propoziţia 2 din [**2**] şi lista de coordonate triliniare din [**4**]. În concluzie, este preferabilă demonstraţia dată pe baza produsului a două omotetii.

Observaţia 2. În [**3**], sub formă de problemă propusă cititorilor spre rezolvare, este afirmată concurenţa dreptelor AD_1, BE_1, CF_1 (cu alte notaţii), fără a fi făcută vreo precizare asupra punctului lor de concurenţă.

Observaţia 3. În [**5**], într-o interesantă Notă de geometria triunghiului, centrele de omotetie S şi S' apar ca puncte de concurenţă ale altor două triplete de drepte asociate unui triunghi dat.

Bibliografie

1. **R. Bairac** - *Cercuri semiînscrise în triunghi*, Delta, 1/2006, 12-15.
2. **T. Bîrsan** - *Ceviene izogonale şi puncte de concurenţă remarcabile*, 9/2002, 321-326.
3. **A. Girici** - *Câteva probleme despre triunghiuri şi cercuri*, Kvant, 11/1990, 46-48.
4. **C. Kimberling** - *Centrul Points and Central Lines in the Plane of a Triangle*, Mathematics Magazine, 67(1994), no.3, 163-187.
5. **I. V. Maftei** - *Două puncte remarcabile într-un triunghi*, G.M. (B) – 1/2008, 1-4.