O problemă cu cifrele unui număr

Titu ZVONARU [1]

Problema *G.116*, propusă de **Maria Miheţ** în *RecMat - 1/2007*, are următorul enunţ:

Aflaţi toate numerele naturale N de patru cifre nenule distincte cu proprietatea că diferenţa dintre cel mai mare număr obţinut prin permutarea cifrelor lui N şi cel mai mic asemenea număr este tocmai N.

Ne propunem să rezolvăm următoarea problemă mai generală:

Aflaţi toate numerele naturale N cu cifre dictincte cu proprietatea că diferenţa dintre cel mai mare număr obţinut prin permutarea cifrelor lui N şi cel mai mic asemenea număr este tocmai N.

Fie n numărul cifrelor lui N. Avem de analizat următoarele cazuri:

A. $n=2$. Fie $a>b$ cifrele lui N. Cel mai mare număr scris cu cifrele lui N este $\overline{ab}$, iar cel mai mic este $\overline{ba}$.

Avem posibilităţile:
i) $\overline{ab}-\overline{ba}=\overline{ab}\Rightarrow\overline{ba}=0$,
ii) $\overline{ab}-\overline{ba}=\overline{ba}\Rightarrow 8a=19b$
şi nu obţinem soluţii.

B. $n=3$. Fie $a>b>c$ cifrele lui N. Avem $\overline{abc}-\overline{cba}=\overline{xyz}$, cu $\{a,b,c\}=\{x,y,z\}$ şi obţinem $z=10+c-a$, $y=9+b-b=9$, $x=a-1-c$.

Cum a este cea mai mare cifră, rezultă $a=9$ şi $\{b,c\}=\{8-c,c+1\}$, adică $8-c=c$, $b=c+1$. Obţinem soluţia $954-459=495$.

C. $n=4$. Fie $a>b>c>d$ cifrele lui N. Avem că $\overline{abcd}-\overline{dcba}=\overline{xyzt}$ şi notăm $\mathcal{C}=\{a,b,c,d\}=\{x,y,z,t\}$. Obţinem:

$$t=10+d-a,\quad z=9+c-b,\quad y=b-1-c,\quad x=a-d.$$

Observăm că $y+z=8$, $x+t=10$ şi deducem că

$$\{y,z\}\in\{\{0,8\},\{1,7\},\{2,6\},\{3,5\}\},\quad \{x,t\}\in\{\{1,9\},\{2,8\},\{3,7\},\{4,6\}\}.$$

Avem de analizat următoarele posibilităţi:

$\{y,z\}$	$\{x,t\}$	(a,b,c,d)	
$\{0,8\}$	$\{1,9\}$	$(9,8,1,0)$	$b-1-c=6\notin\mathcal{C}$
$\{0,8\}$	$\{3,7\}$	$(8,7,3,0)$	$9+c-b=5\notin\mathcal{C}$
$\{0,8\}$	$\{4,6\}$	$(8,6,4,0)$	$b-1-c=1\notin\mathcal{C}$
$\{1,7\}$	$\{2,8\}$	$(8,7,2,1)$	$b-1-c=4\notin\mathcal{C}$
$\{1,7\}$	$\{4,6\}$	$(7,6,4,1)$	
$\{2,6\}$	$\{1,9\}$	$(9,6,2,1)$	$b-1-c=3\notin\mathcal{C}$
$\{2,6\}$	$\{3,7\}$	$(7,6,3,2)$	$a-d=5\notin\mathcal{C}$
$\{3,5\}$	$\{1,9\}$	$(9,5,3,1)$	$a-d=8\notin\mathcal{C}$
$\{3,5\}$	$\{2,8\}$	$(8,5,3,2)$	$a-d=6\notin\mathcal{C}$
$\{3,5\}$	$\{4,6\}$	$(6,5,4,3)$	$b-1-c=0\notin\mathcal{C}$.

[1] Comăneşti, e-mail: tzvonaru@hotmail.com

Obţinem o singură soluţie: $7641 - 1467 = 6174$.

D. $n = 5$. Fie $a > b > c > d > e$ cifrele lui N. Avem că $\overline{abcde} - \overline{edcba} = \overline{xyztu}$ şi notăm $\mathcal{C} = \{a, b, c, d, e\} = \{x, y, z, t, u\}$. Obţinem $u = 10 + e - a$, $t = 9 + d - b$, $z = 9$, $y = b - 1 - d$, $x = a - e$. Rezultă că $a = 9$ şi $e \neq 0$ (dacă $e = 0$ ar urma $x = 9$, deci $x = z$). Observăm că $y + t = 8$, $x + u = 10$ şi, cum $0 \notin \mathcal{C}$, deducem că:

$$\{y, t\} \in \{\{1, 7\}, \{2, 6\}, \{3, 5\}\}, \quad \{x, u\} \in \{\{2, 8\}, \{3, 7\}, \{4, 6\}\},$$

adică

$\{y,t\}$	$\{x,u\}$	(a,b,c,d,e)	
$\{1,7\}$	$\{2,8\}$	$(9,8,7,2,1)$	$b-1-d=4 \notin \mathcal{C}$
$\{1,7\}$	$\{4,6\}$	$(9,7,6,4,1)$	$a-e=8 \notin \mathcal{C}$
$\{2,6\}$	$\{3,7\}$	$(9,7,6,3,2)$	$9+d-b=5 \notin \mathcal{C}$
$\{3,5\}$	$\{2,8\}$	$(9,8,5,3,2)$	$a-e=7 \notin \mathcal{C}$
$\{3,5\}$	$\{4,6\}$	$(9,6,5,4,3)$	$b-1-d=2 \notin \mathcal{C}$.

Nu obţinem soluţii.

E. $n = 6$. Fie $a > b > c > d > e > f$ cifrele lui N. Avem că

$$\overline{abcdef} - \overline{fedcba} = \overline{xyztuv}$$

şi notăm $\mathcal{C} = \{a, b, c, d, e, f\} = \{x, y, z, t, u, v\}$. Obţinem

$v = 10 + f - a$, $\quad u = 9 + e - b$, $\quad t = 9 + d - c$, $\quad z = c - 1 - d$, $\quad y = b - e$, $\quad x = a - f$.

Observăm că $z + t = 8$, $y + u = 9$, $x + v = 10$ şi deducem că

$$\{z, t\} \in \{\{0, 8\}, \{1, 7\}, \{2, 6\}, \{3, 5\}\}$$
$$\{y, u\} \in \{\{0, 9\}, \{1, 8\}, \{2, 7\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}\}$$
$$\{x, v\} \in \{\{1, 9\}, \{2, 8\}, \{3, 7\}, \{4, 6\}\}.$$

Avem de analizat următoarele posibilităţi:

$\{z,t\}$	$\{y,u\}$	$\{x,v\}$	(a,b,c,d,e,f)	
$\{0,8\}$	$\{2,7\}$	$\{1,9\}$	$(9,8,7,2,1,0)$	$c-1-d=4 \notin \mathcal{C}$
$\{0,8\}$	$\{2,7\}$	$\{4,6\}$	$(8,7,6,4,2,0)$	$b-e=5 \notin \mathcal{C}$
$\{0,8\}$	$\{3,6\}$	$\{1,9\}$	$(9,8,6,3,1,0)$	$b-e=7 \notin \mathcal{C}$
$\{0,8\}$	$\{4,5\}$	$\{1,9\}$	$(9,8,5,4,1,0)$	$b-e=7 \notin \mathcal{C}$
$\{0,8\}$	$\{4,5\}$	$\{3,7\}$	$(8,7,5,4,3,0)$	$10+f-a=2 \notin \mathcal{C}$
$\{1,7\}$	$\{0,9\}$	$\{2,8\}$	$(9,8,7,2,1,0)$	$c-d-1=4 \notin \mathcal{C}$
$\{1,7\}$	$\{0,9\}$	$\{4,6\}$	$(9,7,6,4,1,0)$	$9+e-b=3 \notin \mathcal{C}$
$\{1,7\}$	$\{3,6\}$	$\{2,8\}$	$(8,7,6,3,2,1)$	$b-e=5 \notin \mathcal{C}$
$\{1,7\}$	$\{4,5\}$	$\{2,8\}$	$(8,7,5,4,2,1)$	$c-1-d=0 \notin \mathcal{C}$
$\{2,6\}$	$\{0,9\}$	$\{3,7\}$	$(9,7,6,3,2,0)$	$b-e=5 \notin \mathcal{C}$
$\{2,6\}$	$\{1,8\}$	$\{3,7\}$	$(8,7,6,3,2,1)$	$b-e=5 \notin \mathcal{C}$
$\{2,6\}$	$\{4,5\}$	$\{1,9\}$	$(9,6,5,4,2,1)$	$a-f=8 \notin \mathcal{C}$
$\{2,6\}$	$\{4,5\}$	$\{3,7\}$	$(7,6,5,4,3,2)$	$c-1-d=0 \notin \mathcal{C}$
$\{3,5\}$	$\{0,9\}$	$\{2,8\}$	$(9,8,5,3,2,0)$	$b-e=6 \notin \mathcal{C}$
$\{3,5\}$	$\{0,9\}$	$\{4,6\}$	$(9,6,5,4,3,0)$	$9+d-c=8 \notin \mathcal{C}$
$\{3,5\}$	$\{1,8\}$	$\{4,6\}$	$(8,6,5,4,3,1)$	$a-f=7 \notin \mathcal{C}$
$\{3,5\}$	$\{2,7\}$	$\{1,9\}$	$(9,7,5,3,2,1)$	$a-f=8 \notin \mathcal{C}$
$\{3,5\}$	$\{2,7\}$	$\{4,6\}$	$(7,6,5,4,3,2)$	$c-1-d=0 \notin \mathcal{C}$.

Nu obţinem soluţii.

E. $n = 7$. Fie $a > b > c > d > e > f > g$ cifrele lui N. Avem

$$\overline{abcdefg} - \overline{gfedcba} = \overline{zyxtuvw}$$

şi la fel ca în cazul $n = 5$ deducem că $a = 9$ şi $g \neq 0$.

Diferenţa dintre un număr şi răsturnatul său este multiplu de 9; cum suma cifrelor din baza 10 este de asemenea multiplu de 9, deducem că suma celor trei cifre nefolosite la scrierea lui N trebuie să fie multiplu de 9.

Deoarece ştim că cifra 0 nu este folosită, rămând de analizat doar următoarele posibilităţi:

cifre nefolosite	
0,1,8	$9765432 - 2345679 = 7419753$
0,2,7	$9865431 - 1345689 = 8519742$
0,3,6	$9875421 - 1245789 = 8629632$
0,4,5	$9876321 - 1236789 = 8639532$

şi nu obţinem soluţii.

F. $n = 8$. Din acelaşi motiv ca în cazul $n = 7$, avem doar posibilităţile:

cifre nefolosite	
0,9	$87654321 - 12345678 = 75308643$
1,8	$97654320 - 2345679 = 95308641$
2,7	$98654310 - 1345689 = 97308621$
3,6	$98754210 - 1245789 = 97508421$
4,5	$98763210 - 1236789 = 97527421$

cu soluţia $98763210 - 1236789 = 97527421$.

G. $n = 9$. Deoarece n este impar, rezultă că singura cifră nefolosită la scrierea lui N este 0. Obţinem soluţia $987654321 - 123456789 = 864197532$.

H. $n = 10$. Obţinem soluţia $9876543210 - 123456789 = 9753086421$.

ERATĂ

În numărul 1/2007 al revistei Recreaţii Matematice s-au strecurat următoarele greşeli:

1. La pag. 2, r. 1 în loc de 1866 se va citi 1766.

2. În enunţul problemei XII.76 se va considera că funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este continuă, condiţie care a fost omisă.