Un şir strâns legat de şirul lui Wallis

***Adrian CORDUNEANU*[1], *Gheorghe COSTOVICI*[2]**

Scopul propus este studiul şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin

$$a_n = C_n^0 - C_n^1 \frac{1!!}{2!!} + C_n^2 \frac{3!!}{4!!} - C_n^3 \frac{5!!}{6!!} + \cdots + (-1)^n C_n^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}. \tag{1}$$

Vom stabili că este monoton descrescător şi convergent la zero şi vom pune în evidenţă legătura acestuia cu *şirul lui Wallis* $(w_n)_{n\geq 1}$ dat de

$$w_n = \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n+1} \tag{2}$$

(despre care ştim că $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = \dfrac{\pi}{2}$).

Lemă ([**1**], p. 124 sau [**2**], p. 350). *Pentru orice* $k \in \mathbb{N}^*$ *avem*

$$\int_0^{\pi/2} \cos^k x\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin^k x\,dx = \begin{cases} \dfrac{(k-1)!!}{k!!} \cdot \dfrac{\pi}{2}, & k \text{ par} \\ \dfrac{(k-1)!!}{k!!}, & k \text{ impar} \end{cases}.$$

Demonstraţie. Dacă în una din cele două integrale efectuăm schimbarea $t = x - \dfrac{\pi}{2}$, vom obţine pe cealaltă; deci integralele sunt egale. Fie I_k valoarea comună lor. Integrând prin părţi, găsim:

$$\begin{aligned} I_k &= \int_0^{\pi/2} \cos^k x\,dx = \int_0^{\pi/2} (\sin x)' \cos^{k-1} x\,dx = \\ &= -(k-1) \int_0^{\pi/2} \sin x\, \cos^{k-2} x\,(-\sin x)\,dx = \\ &= (k-1) \int_0^{\pi/2} \left(1 - \cos^2 x\right) \cos^{k-2} x\,dx = (k-1)\left(I_{k-2} - I_k\right), \end{aligned}$$

de unde

$$I_k = \frac{k-1}{k} I_{k-2}, \quad k \geq 2.$$

Această relaţie de recurenţă şi faptul că $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ şi $I_1 = 1$ conduc la rezultatul dorit.

Propoziţie. Are loc identitatea

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = C_n^0 - C_n^1 \frac{1!!}{2!!} + C_n^2 \frac{3!!}{4!!} + \cdots + (-1)^n C_n^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}. \tag{3}$$

Demonstraţie. Obţinem (3) exprimând integrala I_{2n} în două moduri. Mai întâi,

[1] Prof. dr., Catedra de matematică, Univ. "Gh. Asachi", Iaşi
[2] Conf. dr., Catedra de matematică, Univ. "Gh. Asachi", Iaşi

conform Lemei, avem $I_{2n} = \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\dfrac{\pi}{2}$. Apoi, folosind formula binomului, găsim:

$$\begin{aligned}
I_{2n} &= \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x\, dx = \int_0^{\pi/2} \left(1-\sin^2 x\right)^n dx = \\
&= \int_0^{\pi/2} \left(C_n^0 - C_n^1 \sin^2 x + C_n^2 \sin^4 x - C_n^3 \sin^6 x + \cdots + (-1)^n C_n^n \sin^{2n} x\right) dx = \\
&= C_n^0 I_0 - C_n^1 I_2 + C_n^2 I_4 - C_n^3 I_6 + \cdots + (-1)^n C_n^n I_{2n} = \\
&= \frac{\pi}{2}\left(C_n^0 - C_n^1 \frac{1!!}{2!!} + C_n^2 \frac{3!!}{4!!} - C_n^3 \frac{5!!}{6!!} + \cdots + (-1)^n C_n^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right).
\end{aligned}$$

Egalând aceste două valori ale lui I_{2n}, obţinem (3).

Corolarul 1. Sunt adevărate afirmaţiile:

1) $a_n = \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}, \quad n \in \mathbb{N}^*;$ (4)

2) $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător.

Demonstraţie. Punctul 1) decurge din (1) şi (3), iar 2) din faptul că $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2n+1}{2n+2} < 1$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Corolarul 2. Sunt adevărate afirmaţiile următoare:

1) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{w_n}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}^*;$ (5)

2) $(a_n)_{n\geq 1}$ converge la zero.

Demonstraţie. Punctul 1) rezultă din (2) şi (4), iar 2) prin trecere la limită în (5) pentru $n \to \infty$.

Observaţie. Faptul că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ poate fi stabilit şi utilizând dubla inegalitate

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}},\ n > 1 \quad ([\mathbf{3}], \text{p. } 48).$$

Bibliografie.

1. **G. M. Fihtenholţ** - *Curs de calcul diferenţial şi integral*, vol. II, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1964.
2. **Gh. Sireţchi** - *Calcul diferenţial şi integral*, vol. I, Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985.
3. ******* - *Probleme de matematică traduse din Kvant*, vol. I, E. D. P., Bucureşti, 1983.