O problemă de construcţie a unui triunghi

Temistocle BÎRSAN[1]

Problemele de construcţie cu rigla şi compasul au un specific şi un farmec aparte. Pe această linie, menţionăm remarcabila monografie *Probleme de construcţii geometrice cu rigla şi compasul* a lui **Gh. Buicliu**.

Problema de care ne vom ocupa este de tipul următor:

Se porneşte de la o figură $\mathcal{F}$ (un triunghi, de exemplu) şi prin diverse construcţii auxiliare se obţine o configuraţie $\mathcal{F}'$. Reţinând câteva elemente ale lui $\mathcal{F}'$ (adică ştergând o bună parte din configuraţia $\mathcal{F}'$), cum putem reconstrui – cu rigla şi compasul – figura iniţială $\mathcal{F}$.

Vom da câteva exemple cunoscute de acest fel:

1. Să se construiască un triunghi ABC cunoscându-i centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor HBC, HCA şi HAB, unde H este ortocentrul acestuia ([**1**], *Problema 624*).

2. Să se construiască un triunghi cunoscând punctele de intersecţie a bisectoarelor interioare cu cercul circumscris triunghiul ([**4**], p. 105, *Problema 88*).

3. Să se construiască triunghiul ABC cunoscând poziţiile vârfurilor A', B', C' ale triunghiurilor echilaterale construite pe laturile lui şi în exterior ([**1**], *Problema 637*).

4. Să se construiască triunghiul ABC cunoscând centrele α, β, γ ale cercurilor adjuncte (CA), (AB), (BC) sau centrele α', β', γ' ale cercurilor adjuncte (BA), (CB), (AC) (se numeşte cerc adjunct (CA) cercul care trece prin B şi este tangent în C laturii CA) ([**1**], *Problema 640*).

5. Să se construiască un triunghi cunoscându-i punctele O, H, I (cu semnificaţii uzuale); în ce condiţii există un astfel de triunghi? ([**3**])

Să începem prin a preciza notaţiile (de altfel uzuale, v. [**2**]) utilizate mai jos (fig. 1):

- I, I_a, I_b, I_c – centrele cercurilor înscris şi exînscrise triunghiului;
- H, H_a, H_b, H_c – ortocentrul şi proiecţiile lui pe laturile BC, CA şi respectiv AB;
- D, E, F – punctele de contact ale cercului înscris $\mathfrak{I}(I,r) \equiv \mathfrak{I}$ cu laturile BC, CA şi respectiv AB;
- D_a, E_a, F_a etc. – punctele de contact ale cercului exînscris $\mathfrak{I}_a(I_a,r_a) \equiv \mathfrak{I}_a$ etc. cu dreptele suport ale aceloraşi laturi;
- A', B', C' – punctele date de $\{A'\} = D_bF_b \cap D_cE_c$, $\{B'\} = E_cD_c \cap E_aF_a$, $\{C'\} = F_aE_a \cap F_bD_b$.

Ne propunem să rezolvăm următoarea

Problemă. *Să se construiască cu rigla şi compasul triunghiul ABC cunoscând poziţiile punctelor A', B', C'.*

[1] Prof. dr., Univ. Tehnică "Gh. Asachi", Iaşi

Vom face analiza problemei, adică pentru configuraţia construită, formată din $\triangle ABC$ dat, $\triangle I_aI_bI_c$ al centrelor cercurilor exînscrise şi $\triangle A'B'C'$ al punctelor de contact exterioare (F_a, E_a; D_b, F_b şi E_c, D_c) vom indica un număr de proprietăţi. Ca urmare, construcţia triunghiului $A'B'C'$ va decurge cu uşurinţă.

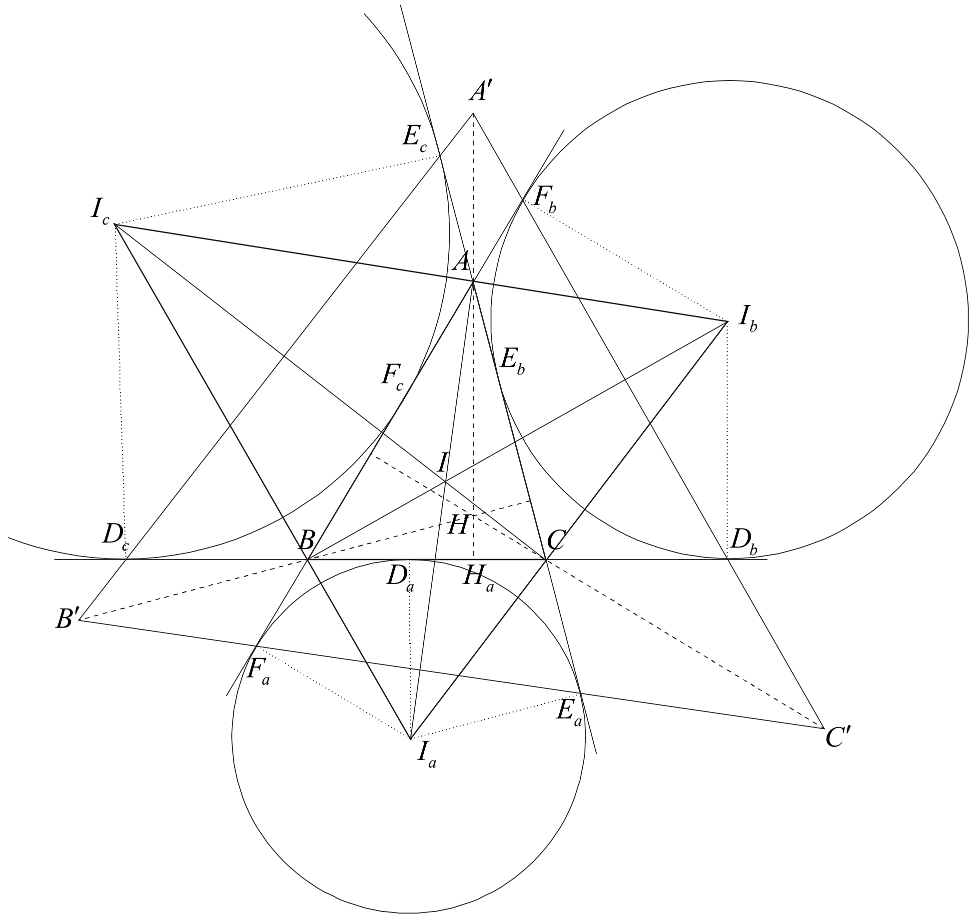

Fig. 1

Propoziţia 1. *Triunghiul $A'B'C'$ are proprietăţile: 1) $m(\widehat{A'}) = 90° - \dfrac{A}{2}$, 2) $B'C'$ şi D_bD_c sunt antiparalele, 3) $B'C' \parallel I_bI_c$, ca şi analoagele acestora.*

Demonstraţie. 1) Deoarece BD_b şi BF_b sunt tangente la cercul $\mathfrak{I}_b$, rezultă că $\triangle BD_bF_b$ este isocel şi, deci, $m(\widehat{BD_bF_b}) = 90° - \dfrac{B}{2}$. La fel, considerând $\triangle CD_cE_c$ isoscel, deducem că $m(\widehat{CD_cE_c}) = 90° - \dfrac{C}{2}$. Ca urmare, în $\triangle A'D_bD_c$ avem că $m(\widehat{A'}) = 90° - \dfrac{A}{2}$. Analog, se stabileşte că $m(\widehat{B'}) = 90° - \dfrac{B}{2}$ şi $m(\widehat{C'}) = 90° - \dfrac{C}{2}$.

2) Întrucât $m(\widehat{B'}) = 90^\circ - \dfrac{B}{2} = m(\widehat{A'D_bD_c})$, dreptele $B'C'$ şi D_bD_c sunt antiparalele în raport cu $\triangle A'B'C'$.

3) Considerăm dreapta d determinată de punctele B şi I_b ca o secantă a dreptelor $B'C'$ şi I_bI_c şi arătăm că se formează unghiuri alterne interne egale.

Se ştie că în $\triangle I_aI_bI_c$ avem $m(\widehat{I_a}) = 90^\circ - \dfrac{A}{2}$ şi analoagele ($m(\widehat{I_a}) = 180^\circ - m(\widehat{BIC}) = \dfrac{B}{2} + \dfrac{C}{2} = 90^\circ - \dfrac{A}{2}$). Atunci, din faptul că $d \perp I_aI_c$ deducem că $m(\widehat{d, I_bI_c}) = 90^\circ - m(\widehat{I_c}) = 90^\circ - \left(90^\circ - \dfrac{C}{2}\right) = \dfrac{C}{2}$, iar din $d \perp A'C'$ avem că $m(\widehat{d, B'C'}) = 90^\circ - m(\widehat{C'}) = \dfrac{C}{2}$.

Observaţie. $\triangle A'B'C'$ şi $\triangle I_aI_bI_c$ sunt omotetice, căci au laturile paralele două câte două. Centrul lor de omotetie este punctul de concurenţă a dreptelor $A'I_a$, $B'I_b$, $C'I_c$, pe care-l notăm cu K'.

Propoziţia 2. *Dreptele AA', BB', CC' sunt concurente în punctul H.*

Demonstraţie. Fie A^* punctul în care AA' intersectează dreapta BC. Pentru a arăta că AA' trece prin H, vom demonstra că A^* coincide cu H_a.

Conform teoremei lui Menelaus aplicată $\triangle BD_bF_b$ şi transversalei AA', avem relaţia

$$\frac{A^*B}{A^*D_b} = \frac{AB}{AF_b} \cdot \frac{A'F_b}{A'D_b}.$$

Cum $AB = c$ şi $AF_b = BF_b - AB = p - c$ (p fiind semiperimetrul $\triangle ABC$), rămâne să calculăm $A'D_b$ şi $A'F_b$. Să mai observăm că $D_bD_c = BD_b + CD_c - BC = p + p - a = b + c$. Acum, cu teorema sinusurilor în $\triangle A'D_bD_c$ şi ţinând cont de punctele 1) şi 2) ale Propoziţiei 1, obţinem relaţia

$$\frac{A'D_b}{\cos\frac{C}{2}} = \frac{D_bD_c}{\cos\frac{A}{2}} \Leftrightarrow A'D_b = (b+c)\,\frac{\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}},$$

iar $A'F_b = A'D_b - D_bF_b = (b+c)\,\dfrac{\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} - 2p\sin\dfrac{B}{2}$ (din $\triangle BD_bF_b$).

Ca urmare, relaţia de mai sus se scrie

$$\frac{A^*B}{A^*D_b} = \frac{c}{p-c} \cdot \frac{(b+c)\,\dfrac{\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} - 2p\sin\dfrac{B}{2}}{(b+c)\,\dfrac{\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}}.$$

Utilizând formele de tipul $\cos\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{p\,(p-a)}{bc}}$, după calcule de rutină rezultă că

$$\frac{A^*B}{A^*D_b} = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{(b+c)\,(a+b-c)},$$

de unde

$$\frac{A^*B}{A^*B+A^*D_b}=\frac{a^2-b^2+c^2}{(b+c)(a+b-c)+a^2-b^2+c^2}\Leftrightarrow\frac{A^*B}{BD_b}=\frac{a^2-b^2+c^2}{a\cdot 2p}$$
$$\Leftrightarrow\frac{A^*B}{p}=\frac{a^2-b^2+c^2}{2\cdot 2p}\Leftrightarrow A^*B=c\cos B,$$

adică A^* este piciorul înălţimii AH_a. Deci AA' trece prin H. Analog se arată că şi BB', CC' trec prin H, ceea ce încheie demonstraţia.

Observaţie. $\triangle A'B'C'$ şi $\triangle ABC$ sunt omologice, H fiind centru de omologie. Se remarcă uşor că ele sunt şi ortologice.

Propoziţia 3. *Punctul H este centrul cercului circumscris $\triangle A'B'C'$, iar raza R' a acestui cerc este dată de $R'=HA+r_a=HB+r_b=HC+r_c$.*

Demonstraţie. Deoarece $B'H\perp AE_a$, avem că $m(\widehat{HB'C'})=m(\widehat{HB'E_a})=90^\circ-m(\widehat{AE_aF_a})=\dfrac{A}{2}$. Din $CH'\perp AF_a$ şi procedând la fel, deducem că $m(\widehat{HC'B'})=\dfrac{A}{2}$. Deci $\triangle HB'C'$ este isoscel, adică $HB'=HC'$. În mod analog, se arată că $HB'=HA'$. Rezultă că H este centrul cercului circumscris $\triangle A'B'C'$.

Pentru partea a doua din enunţ să arătăm că $AA'=r_a$. Într-adevăr, în $\triangle A'AF_b$ avem: $AF_b=p-c$, $m(\widehat{AA'F_b})=\dfrac{B}{2}$ (analoagă uneia de mai sus) şi $m(\widehat{A'F_bA})=90^\circ+\dfrac{B}{2}$ (unghi exterior $\triangle BD_bF_a$ isoscel). Cu teorema sinusurilor, obţinem că

$$AA'=\cos\frac{B}{2}\cdot\frac{p-c}{\sin\frac{B}{2}}=(p-c)\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}\sqrt{\frac{ac}{(p-a)(p-c)}}=\frac{S}{p-a}=r_a.$$

Atunci, $R'=A'H=HA+AA'=HA+r_a$ etc.

Consecinţă. *Dreptele $A'D_a$, $B'E_b$, $C'F_c$ sunt concurente în ortocentrul H' al $\triangle A'B'C'$.*

Demonstraţie. Segmentele $[AA']$ şi $[I_aD_a]$ au lungimi egale cu r_a şi sunt paralele (ca fiind perpendiculare pe BC). Prin urmare, patrulaterul $A'AI_aD_a$ este paralelogram şi, deci, $A'D_a\parallel AI_a$. Din aceasta şi faptul că $AI_a\perp B'C'$, rezultă că $A'D_a\perp B'C'$, adică $A'D_a$ este înălţimea în $\triangle A'B'C'$. În acelaşi fel, $B'E_b$, $C'F_c$ sunt înălţimi în $\triangle A'B'C'$ şi demonstraţia este completă.

Propoziţia 4. *Dreptele $A'I_a$, $B'I_b$, $C'I_c$ trec prin mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$ şi repsectiv $[AB]$ ale $\triangle ABC$.*

Demonstraţie. Vom dovedi numai afirmaţia relativă la $A'I_a$. Fie $\{U\}=A'I_a\cap BC$. Revine la a arăta că $BU=\dfrac{a}{2}$.

Din faptul că $\triangle I_aD_aU\sim\triangle A'H_aU$ rezultă că

$$\frac{UD_a}{UH_a}=\frac{r_a}{r_a+h_a}\Leftrightarrow\frac{UD_a}{D_aH_a}=\frac{r_a}{2r_a+h_a}\Rightarrow UD_a=\frac{a}{2p}\cdot p\frac{c-b}{a}=\frac{c-b}{2},$$

căci $D_aH_a=BH_a-BD_a=a\cos B-(p-c)=2c\cos^2\dfrac{B}{2}-p=p\dfrac{c-b}{a}$, iar

$$\frac{r_a}{2r_a+h_a}=\frac{1}{2+\frac{h_a}{r_a}}=1\Big/\left(2+\frac{a\cdot h_a}{(p-a)r_a}\cdot\frac{p-a}{a}\right)=1\Big/\left(2+\frac{2S}{S}\cdot\frac{p-a}{a}\right)=\frac{a}{2p}.$$

În sfârşit, $BU = BD_a + UD_a = (p - c) + \dfrac{c - b}{2} = \dfrac{a}{2}$ şi demonstraţia este încheiată.

Consecinţă. *$A'I_a$, $B'I_b$, $C'I_c$ sunt simediane atât în $\triangle A'B'C'$ cât şi în $\triangle I_aI_bI_c$.*

Demonstraţie. Mijlocul U al segmentului $[BC]$ este şi mijlocul lui $[D_bD_c]$, căci $CD_b = BD_c = p - a$. Ţinând cont de punctul 2) al Propoziţiei 1, în $\triangle A'B'C'$ avem că $A'I_a$ trece prin mijlocul antiparalelei D_bD_c la $B'C'$. Cum în orice triunghi o simediană este locul mijloacelor antiparalelelor la latura opusă [**2**], p.55, deducem că $A'I_a$ este simediana prin A' a $\triangle A'B'C'$. În sfârşit din omotetia observată mai sus a triunghiurilor $A'B'C'$ şi $I_aI_bI_c$, rezultă că $A'I_a$ este simediana prin I_a a $\triangle I_aI_bI_c$ (faptul rezultă şi observând că BC şi I_bI_c sunt antiparalele în $\triangle I_aI_bI_c$).

Revenim la problema de construcţie propusă la început. Rezultatele precedente fac posibilă construcţia $\triangle ABC$, atunci când se dă $\triangle A'B'C'$. Într-adevăr, cu rigla şi compasul putem parcurge fiecare dintre paşii următori:

1) se construieşte centrul H al cercului circumscris triunghiului $A'B'C'$ (care va fi ortocentrul triunghiului ABC, conform Propoziţiei 3, iar conform Propoziţiei 2 va trebui ca A, B, C să se afle pe $A'H$, $B'H$, $C'H$, respectiv);

2) în $\triangle A'B'C'$ se construieşte simediana corespunzătoare vârfului A';

3) se ia în mod arbitrar un punct $C_1 \in (HC')$ şi prin el construim perpendiculara pe $A'H$ care intersectează $(B'H)$ într-un punct B_1;

4) unim H cu mijlocul segmentului $[C_1B_1]$ pentru a avea locul mijloacelor segmentelor ce se sprijină pe HC' şi HB' şi sunt perpendiculare pe $A'H$;

5) intersectăm acest loc geometric cu simediana prin A' construită la pasul 2) (conform Propoziţiei 4 şi Consecinţei sale, acest punct va fi mijlocul laturii $[BC]$ căutate);

6) obţinem vârfurile C şi B ale triunghiului de construit ca intersecţii ale perpendicularei pe $A'H$ dusă prin punctul construit la 5) cu (HC') şi respectiv (HB');

7) se construieşte vârful A ca intersecţie cu (HA') a perpendicularei prin B pe $C'H$.

Bibliografie

1. **Gh. Buicliu** - *Probleme de construcţii geometrice cu rigla şi compasul*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1957.
2. **T. Lalescu** - *Geometria triunghiului*, Ed. Tineretului, Bucureşti, 1958.
3. **F. Lo Jacomo** - *Enoncé 245*, APMEP, Buletin no. 408, 1997, 57-79.
4. **D. Smaranda, N. Soare** - *Transformări geometrice*, Ed. Acad. R.S.R., Bucureşti, 1988.