# O soluţie parţială a unei probleme a lui N. Papacu

*Cătălin ŢIGĂERU*[1]

Profesorul **Nicolae Papacu** analizează în [**1**] recurenţa pătratică, subliniind faptul că natura şirului este dictată de alegerea termenului iniţial şi lasă ca problemă deschisă cazul (III.3.d). Ne propunem să dăm un răspuns parţial acestei probleme.

**I. O problemă deschisă şi câteva rezultate generale.** Recurenţa

$$x_{n+1} = ax_n^2 + bx_n + c, \quad x_0 \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0,$$

se reduce, cu substituţia $y_n = ax_n + \dfrac{b}{2}$, la recurenţa $y_{n+1} = y_n^2 + \alpha$, unde $\alpha = \dfrac{1}{2}(2b - \Delta)$, cu $\Delta = b^2 - 4ac$. Situaţia propusă ca problemă deschisă, notată (III.3.d) în articolul citat, se referă la cazul în care $\alpha < 0$ şi $y_0 \in (-L_2, L_2) \setminus \{\pm L_1\}$, unde $L_{1,2} = \dfrac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-4\alpha}\right)$ reprezintă punctele fixe ale recurenţei. Dacă punem $\alpha = -\delta^2$, atunci ne rămâne de studiat recurenţa

$$y_0 \in [-L_2, L_2]\,,\ y_{n+1} = f(y_n)\,,\ n \in \mathbb{N},\ \text{unde } f : \mathbb{R} \to \left[-\delta^2, \infty\right),\ f(x) = x^2 - \delta^2, \quad (1)$$

este funcţia ataşată recurenţei, care este surjectivă, strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$, strict crescătoare pe $[0, \infty)$ şi care are punctele fixe

$$L_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1+4\delta^2}\right), \quad L_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1+4\delta^2}\right). \quad (2)$$

Introducem notaţia: dacă $g : M \to M$, atunci $g \circ g \circ \ldots \circ g = g^{[n]}$, unde compunerea s-a efectuat de $n$ ori. Astfel, constatăm că recurenţa (1) se mai scrie şi

$$y_0 \in [-L_2, L_2]\,, \quad y_{n+1} = f^{[n]}(y_0)\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1')$$

Analiza care urmează va stabili următoarele tipuri distincte de comportamente ale şirurilor studiate: (*i*) şiruri convergente, care nu sunt constante de la un loc încolo; (*ii*) şiruri convergente, constante de la un loc încolo; (*iii*) şiruri mărginite, fără limită, cu mulţimea valorilor finită; (*iv*) şiruri mărginite, fără limită, cu mulţimea valorilor infinită; (*v*) şiruri nemărginite, cu limita egală cu $\infty$.

O condiţie suficientă, care să asigure mărginirea şirului $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, este dată de

**Propoziţia 1.** *Dacă* $0 < \delta \leq \sqrt{2}$*, atunci şirul* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este mărginit.*

**Demonstraţie.** Pornim cu observaţia că $f([-L_2, L_2]) = \left[-\delta^2, L_2\right]$; dacă $-L_2 \leq -\delta^2 \quad (*)$, atunci $\left[-\delta^2, L_2\right] \subseteq [-L_2, L_2]$, de unde

$$f\left(\left[-\delta^2, L_2\right]\right) = f\left(\left[-\delta^2, 0\right] \cup [0, L_2]\right) = f([0, L_2]) = \left[-\delta^2, L_2\right].$$

Demonstrăm, prin inducţie, că $f^{[n]}([-L_2, L_2]) = \left[-\delta^2, L_2\right]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. În adevăr, dacă presupunem că $f^{[n-1]}([-L_2, L_2]) = \left[-\delta^2, L_2\right]$, atunci

$$f^{[n]}([-L_2, L_2]) = f\left(f^{[n-1]}([-L_2, L_2])\right) = f\left(\left[-\delta^2, L_2\right]\right) = \left[-\delta^2, L_2\right].$$

Deducem că $f^{[n]}([-L_2, L_2]) = \left[-\delta^2, L_2\right]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, adică, dacă este îndeplinită condiţia $(*)$, atunci şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit. Rezolvând inegalitatea şi ţinând cont de $\delta > 0$, obţinem $0 < \delta \leq \sqrt{2}$ şi demonstraţia este încheiată.

[1] Lect. dr., Universitatea „ Ştefan cel Mare”, Suceava

Ţinând cont de acest rezultat, împărţim analiza noastră în două cazuri mari: $\delta \leq \sqrt{2}$ şi $\delta > \sqrt{2}$. Teoremele materialului prezent aduc lămuriri doar în primul caz, în al doilea limitându-ne la câteva comentarii şi la formularea unei conjecturi.

**Lema 1.** *Dacă* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este şirul definit de* (1)*, atunci* $y_n > 0$*,* $\forall n \in \mathbb{N}$*, dacă şi numai dacă* $y_0 = L_2$*.*

**Demonstraţie.** Să presupunem prin reducere la absurd că există $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definit de (1) astfel încât $y_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, cu $y_0 \in (0, L_2)$. Demonstrăm că, în această ipoteză, şirul ar fi strict descrescător: în adevăr, dacă $y_0 \in (0, L_2)$, atunci, deoarece $f(x) < x, \forall x \in (0, L_2)$, ar rezulta că $y_1 < y_0$, de unde, ţinând cont de faptul că $f$ este strict crescătoare pe $(0, \infty)$, s-ar deduce, prin inducţie, că $y_{n+1} < y_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Mai departe, ar rezulta că şirul este covergent, deci limita ar fi unul din punctele fixe $L_1$ sau $L_2$. Cum şirul este strict descrescător, s-ar deduce că $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = L_1 < 0$, ceea ce contrazice faptul că $y_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Constatarea faptului că, dacă $y_0 = L_2$, atunci $y_n = L_2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, încheie demonstraţia.

**Lema 2.** *Fie* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *şirul definit de* (1)*; dacă* $\delta > 1$*, atunci* $y_n < 0$*,* $\forall n \in \mathbb{N}$*, dacă şi numai dacă* $y_0 = L_1$*.*

**Demonstraţie.** Considerăm un invers la dreapta al funcţiei $f$:

$$h : \left[-\delta^2, L_2\right] \to \left[-L_2, 0\right], \quad h(x) = -\sqrt{x + \delta^2}, \tag{3}$$

unde $\delta > 1$; evident $h$ satisface $(f \circ h)(x) = x$, $\forall x \in \left[-\delta^2, L_2\right]$. Deoarece $\delta > 1$, deducem că $-\delta^2 < -\delta < L_1 < 0$, de unde rezultă că $h([-\delta, 0]) \subset [-\delta, 0]$. Această constatare permite construirea şirului $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definit astfel:

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_{n+1} = h(\alpha_n), \; n \in \mathbb{N}.$$

Ţinând cont de faptul că $h$ este strict descrescătoare şi de faptul că $L_1$ este unicul punct fix al funcţiei $h$, se demonstrează prin inducţie că

$$-\delta = \alpha_1 < \alpha_3 < \cdots < \alpha_{2n-1} < \cdots < L_1 < \cdots < \alpha_{2n} < \cdots < \alpha_2 < \alpha_0 = 0$$

şi că $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = L_1$. Definim şirul de intervale după cum urmează:

$I_0 = (\alpha_1, \alpha_3)$, $I_n = (\alpha_{2n-1}, \alpha_{2n+1})$, $n \in \mathbb{N}^*$ şi $J_0 = (\alpha_2, \alpha_0)$, $J_n = (\alpha_{2n+2}, \alpha_{2n})$, $n \in \mathbb{N}$.

Constatând că $h(I_n) = J_n, n \in \mathbb{N}^*$, $h(J_n) = I_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, obţinem $(h \circ h)^{[n]}(I_0) = I_n$, $(h \circ h)^{[n]}(J_0) = J_n$, ceea ce conduce la

$$\left(f^{[2n-1]}\right)(I_n) = J_0, \; \left(f^{[2n]}\right)(J_n) = J_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{4}$$

Dacă $y_0 \in [-L_2, 0)$, atunci avem de analizat situaţiile:

(a) $y_0 \in [-L_2, -\delta)$; atunci $y_1 = f(y_0) > 0$;

(b) $y_0 \in \{\alpha_n \mid n \in \mathbb{N}\}$; atunci există un $m \in \mathbb{N}$ astfel ca $y_0 = \alpha_m = h^{[m-1]}(0)$, de unde obţinem că $y_m = f^{[m-1]}\left(h^{[m-1]}(0)\right) = 0$; mai departe ajungem la $y_{m+2} > 0$.

(c) Dacă $y_0 \in [-\delta, 0] \setminus \{\{\alpha_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{L_1\}\}$, atunci: (c.1) dacă $y_0 < L_1$, există un $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $y_0 \in I_m$, deci $y_{2m-1} = \left(f^{[2m-1]}\right)(y_0) \in J_0$, de unde $y_{2m} \in f(J_0) = \left[-\delta^2, -\delta\right]$, ceea ce conduce la $y_{2m+1} \in f\left(\left[-\delta^2, -\delta\right]\right) \subset (0, L_2)$; (c.2) dacă $y_0 > L_1$, există un $m \in \mathbb{N}$ astfel încât $y_0 \in J_m$, deci $y_{2m} = \left(f^{[2m]}\right)(y_0) \in J_0$, de unde $y_{2m+2} \in (0, L_2)$.

S-a demonstrat că, dacă $y_0 \in [-L_2, 0] \setminus \{L_1\}$, atunci $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $y_0 > 0$. Deoarece, dacă $y_0 = L_1$, atunci $y_n = L_1 < 0, \forall n \in \mathbb{N}$, deducem că $y_n < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, dacă şi numai dacă $y_0 = L_1$.

Următorul rezultat marchează locul apariţiei şirurilor periodice.

**Propoziţia 2.** *Dacă* $1 \leq \delta$*, atunci:*

*a) ecuaţia* $f(x) = h(x)$ *are o unică soluţie pozitivă* $a \in [0, \delta)$*;*

*b) dacă* $y_0 = a$*, atunci şirul* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, definit de* (1)*, este periodic, cu* $y_{2n} = a > 0$*,* $y_{2n+1} = f(a) < 0$.

**Demonstraţie.** *a)* Fie funcţia $g(x) = f(x) - h(x) = x^2 + \sqrt{x + \delta^2} - \delta^2$, ce este strict crescătoare pe $[0, \infty)$. Deoarece $g(0) = \delta - \delta^2 \leq 0$, $g(\delta) = \sqrt{\delta^2 + \delta} > 0$ (egalitatea apare pentru $\delta = 1$), deducem că ecuaţia $g(x) = 0$ are o soluţie unică $a \in [0, \delta) \subset [0, L_2)$.

*b)* se deduce din $(f \circ h)(x) = x, \forall x \in \left[-\delta^2, L_2\right]$. În adevăr, dacă $y_0 = a$, atunci $y_2 = f(f(a)) = f(h(a)) = a$, de unde, prin inducţie obţinem $y_{2n} = a$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Analog vom obţine $y_{2n+1} = f(a), \forall n \in \mathbb{N}^*$. q.e.d.

**II. Analiza cazurilor corespunzătoare lui** $0 < \delta \leq 1$**.**

**1. Cazul** $0 < \delta < 1$**.** Comportamentul şirului (1) este descris de

**Teorema 1.** *Dacă* $0 < \delta < 1$*, atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \begin{cases} L_1; & y_0 \in (-L_2, L_2), \\ L_2; & y_0 \in \{-L_2, L_2\}. \end{cases}$.

**Demonstraţie.** În primul rând, demonstrăm că, dacă $y_0 \in (-L_2, L_2)$, atunci există $n_0 \geq 2$ astfel încât $y_n \in \left(-\delta^2, 0\right)$, $\forall n \geq n_0$. În adevăr, dacă $y_0 \in [-\delta, \delta]$, atunci $y_2 \in \left(-\delta^2, 0\right)$; demonstrăm prin inducţie că $y_n \in \left(-\delta^2, 0\right)$, $\forall n \geq 2$: dacă $y_{n-1} \in \left(-\delta^2, 0\right)$, atunci $y_n = y_{n-1}^2 - \delta^2 \leq \delta^4 - \delta^2 = \delta^2\left(\delta^2 - 1\right) < 0$; cum $y_n = y_{n-1}^2 - \delta^2 \geq -\delta^2$, obţinem $y_n \in \left(-\delta^2, 0\right)$, $\forall n \geq 2$. S-a demonstrat că, dacă $y_0 \in [-\delta, \delta]$, atunci $y_n \in \left(-\delta^2, 0\right), \forall n \geq 2$.

Dacă $y_n \in (-L_2, -\delta) \cup (\delta, L_2)$, din Lema 1 deducem că $\exists n_0$ astfel ca $y_{n_0} < 0$. Deoarece $y_1 > 0$, rezultă că $n_0 \geq 2$. Pentru că $y_{n_0} = f(y_{n_0-1})$, cu $n_0 - 1 \geq 1$, deducem că $y_{n_0} \in \left(-\delta^2, 0\right)$, de unde, ca mai sus, rezultă că $y_n \in \left(-\delta^2, 0\right)$, $\forall n \geq n_0$.

Am demonstrat că, dacă $y_0 \in (-L_2, L_2)$, atunci există $n_0 \geq 2$ astfel încât $y_n \in \left(-\delta^2, 0\right)$, $\forall n \geq n_0$. Mai departe, dacă $y_0 \in (-L_2, L_2) \setminus \{L_1\}$, atunci, deoarece $f$ este strict descrescătoare pe $\left(-\delta^2, 0\right)$, obţinem, prin inducţie, următoarele concluzii:

(a) în cazul $y_{n_0} \in \left(-\delta^2, L_1\right)$, avem $\forall m \in \mathbb{N}$

$$y_{n_0} < y_{n_0+2} < \cdots < y_{n_0+2m} < \cdots < L_1 < \cdots < y_{n_0+2m+1} < \cdots < y_{n_0+3} < y_{n_0+1};$$

(b) în cazul $y_{n_0} \in (L_1, 0)$, avem $\forall m \in \mathbb{N}$

$$y_{n_0+1} < y_{n_0+3} < \cdots < y_{n_0+2m+1} < \cdots < L_1 < \cdots < y_{n_0+2m} < \cdots < y_{n_0+2} < y_{n_0};$$

în ambele cazuri se deduce $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = L_1$. Dacă $y_0 = L_1$, atunci $y_n = L_1, \forall n \in \mathbb{N}$, deci, din nou $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = L_1$. Ţinând cont că, dacă $y_0 \in \{-L_2, L_2\}$, atunci $y_n = L_1, \forall n \geq 2$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = L_2$, demonstraţia se încheie.

**2. Cazul** $\delta = 1$**.** Conform Propoziţiilor 1 şi 2, vor apare şiruri mărginite, fără limită. Pentru a enunţa rezultatul, construim mulţimea $M_0$ astfel: pentru fiecare $n \in$

$\mathbb{N}^*$, considerăm mulţimile $M_0^n = \left\{x \in [-L_2, L_2] \mid f^{[n]}(x) = 0\right\}$ şi fie $M_0 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_0^n$. Să notăm faptul că, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, avem $0 \in M_0^{2n}$, $\{\pm 1\} \subset M_0^{2n-1}$. Mai mult, dacă $\beta \in M_0$, atunci avem şi incluziunea $\left\{x \in [-L_2, L_2] \mid f^{[n]}(x) = \beta\right\} \subset M_0$.

**Teorema 2.** *Dacă $\delta = 1$, atunci şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent dacă şi numai dacă $y_0 \in [-L_2, L_2] \setminus M_0$ şi* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \begin{cases} L_1;\ y_0 \in (-L_2, L_2) \setminus M_0, \\ L_2;\ y_0 \in \{-L_2, L_2\}. \end{cases}$

*Dacă $y_0 \in M_0$, atunci $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nu are limită şi există $n_1 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $y_n = \dfrac{1}{2}\left((-1)^n - 1\right)$, $\forall n \geq n_1$.*

**Demonstraţie.** Se demonstrează prin inducţie că, dacă $y_0 \in (-1, 1)$, atunci $y_n \in (-1, 0), \forall n \geq 1$. Mai departe, judecând ca în Teorema 1, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = L_1$.

Să presupunem că $y_0 \in (-L_2, -1) \cup (1, L_2) \setminus M_0$; conform Lemei 1, există $n_0 \geq 2$ astfel ca $y_{n_0} < 0$. Deoarece $y_0 \notin M_0$, rezultă că $f^{[n_0]}(y_0) \neq 0$, deci $y_{n_0+1} \neq 0$, de unde $-1 < y_{n_0} < 0$. La fel ca mai sus, obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = L_1$.

Dacă $y_0 \in M_0$, atunci există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $y_{n_0+1} = f^{[n_0]}(y_0) = 0$; în continuare obţinem $y_n = \dfrac{1}{2}\left((-1)^n - 1\right), \forall n \geq n_1 = n_0 + 1$ şi demonstraţia se încheie.

**3. Cazul** $1 < \delta \leq \sqrt{2}$**.** Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, considerăm mulţimile $M_{L_{1,2}}^n = \left\{x \in [-L_2, L_2] \mid f^{[n]}(x) = L_{1,2}\right\}$, $M_{L_1} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_{L_1}^n$, $M_{L_2} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_{L_2}^n$.
Să notăm deocamdată că $L_1 \in M_{L_1}, L_2 \in M_{L_2}$ şi că $M_{L_1} \cap M_{L_2} = \emptyset$.

**Teorema 3.** *Dacă $1 < \delta \leq \sqrt{2}$, atunci şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent dacă şi numai dacă $y_0 \in M_{L_1} \cup M_{L_2}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = L_1$ dacă $y_0 \in M_{L_1}$ şi $= L_2$ dacă $y_0 \in M_{L_2}$.*

*Dacă $y_0 \in [-L_2, L_2] \setminus \{M_{L_1} \cup M_{L_2}\}$, atunci şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit, nu are limită şi conţine o infinitate de termeni negativi şi o infinitate de termeni pozitivi. Mai mult, există valori ale lui $y_0$ pentru care mulţimea valorilor şirului este finită şi valori ale lui $y_0$ pentru care mulţimea valorilor şirului este infinită.*

**Demonstraţie.** Să presupunem că $y_0 \in [-L_2, L_2] \setminus \{M_{L_1} \cup M_{L_2}\}$ şi să presupunem prin absurd că există $n_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $y_n > 0, \forall n \geq n_0$. Atunci putem considera şirul $(\bar{y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit astfel

$$\bar{y}_0 = y_{n_0}, \quad \bar{y}_{n+1} = f(\bar{y}_n), \quad n \in \mathbb{N}^*. \tag{$**$}$$

Deoarece $\bar{y}_n = y_{n+n_0} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, deducem, pe baza Lemei 1, că $\bar{y}_0 = L_2$, adică $y_{n_0} = L_2$; dar aceasta conduce la $y_0 \in M_{L_2}$, fals. Presupunem prin absurd că există $n_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $y_n < 0, \forall n \geq n_0$. Luând în considerare şirul $(\bar{y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit de $(**)$, deducem că $\bar{y}_n = y_{n+n_0} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$, ceea ce, în virtutea Lemei 2, conduce la $\bar{y}_0 = L_1$, adică $y_{n_0} = L_1$, aceasta însemnând că $y_0 \in M_{L_1}$, fals din nou. S-a demonstrat astfel că, dacă $y_0 \in [-L_2, L_2] \setminus \{M_{L_1} \cup M_{L_2}\}$, atunci şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit, nu are limită şi conţine o infinitate de termeni pozitivi şi o infinitate de termeni negativi. Dacă $y_0 \in M_{L_1} \cup M_{L_2}$, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \in \{L_1, L_2\}$.

Propoziţia 2 semnalează faptul că, în acest caz, există şiruri periodice sau, mai general, şiruri cu mulţimea valorilor finită. Demonstrăm în continuare că putem alege

$y_0$ astfel încât mulţimea valorilor şirului să fie infinită. Pentru aceasta, considerăm aplicaţia $A : \tilde{\mathbb{N}} \to [X]$, unde $\mathbb{R}[X]$ este inelul polinoamelor cu coeficienţi reali şi $\tilde{\mathbb{N}} = \mathbb{N}\times\mathbb{N}\setminus\{(n,n) \mid n \in \mathbb{N}\}$, definită prin $A(n_1, n_2) = f^{[n_1]}(X) - f^{[n_2]}(X) \in \mathbb{R}[X]$. Considerăm mulţimea $S$ care are ca elemente toate rădăcinile din intervalul $[-L_2, L_2]$ ale polinoamelor ce aparţin imaginii funcţiei $A$. Cum $S$ este numărabilă, alegem $y_0 = b \in [-L_2, L_2] \setminus S$; demonstrăm că funcţia $Y : \mathbb{N} \to [-L_2, L_2]$, $Y(n) = y_n$ este injectivă: în adevăr, dacă ar exista $n_1, n_2 \in \mathbb{N}, n_1 \neq n_2$, astfel ca $Y(n_1) = Y(n_2)$, atunci am avea $f^{[n_1]}(b) = f^{[n_2]}(b)$, ceea ce ar însemna că polinomul $g \in A(\tilde{\mathbb{N}})$, $g(X) = f^{[n_1]}(X) - f^{[n_2]}(X)$, are rădăcina $b \in S$, ceea ce este fals. Q.e.d.

**III. Completări şi comentarii finale. 1.** Propoziţia 2 asigură, pentru $1 \le \delta$, existenţa şirurilor periodice, de perioadă 2. Fără a intra în detalii, precizăm doar că se pot construi şiruri care au perioade mai mari decât 2.

**2.** Pentru $\delta = \sqrt{2}$ se cunoaşte forma analitică a termenului general, această situaţie făcând obiectul mai multor probleme de concurs (vezi [1], [3] ).

**3.** În cazul $\delta > 1$, putem constata: $(a)$ dacă $y_0 \in M_{L_1} \cup M_{L_2}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = L_1$ dacă $y_0 \in M_{L_1}$ şi $= L_2$ dacă $y_0 \in M_{L_2}$.

$(b)$ Conform propoziţiei 2, există şiruri periodice sau şiruri periodice de la un loc încolo, deci şiruri mărginite, cu un număr finit de valori.

$(c)$ Există posibilitatea de a alege $y_0 \in [-L_2, L_2]$ astfel încât şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ să aibă limita egală cu $\infty$; de exemplu, dacă este $y_0 = 0$, atunci $y_1 = -\delta^2, y_2 = \delta^4 - \delta^2 > L_2$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$. Ceea ce nu putem preciza este dacă există posibilitatea de a alege $y_0 \in [-L_2, L_2]$, astfel încât şirul să fie mărginit şi mulţimea valorilor şirului infinită. În legătură cu acest subiect propunem conjectura:

*Şirul* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, definit de recurenţa* $y_0 \in \left[-\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+4\delta^2}\right), \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+4\delta^2}\right)\right]$, $y_{n+1} = y_n^2 - \delta^2, \delta > \sqrt{2}$*, este mărginit dacă şi numai dacă este periodic de la un loc încolo.*

**4.** Sintetizăm concluziile articolului în următorul tabel:

| Valorile lui $\delta$ | Tipul de şiruri |
|---|---|
| $\delta \in (0,1)$; | $(i), (ii)$; |
| $\delta = 1$; | $(i), (ii), (iii)$; |
| $\delta \in \left(1, \sqrt{2}\right]$; | $(ii), (iii), (iv)$; |
| $\delta \in \left(\sqrt{2}, \infty\right)$; | $(ii), (iii), (v), (iv-?)$. |

**5.** Dl prof. *Gheorghe Marchitan* a citit cu atenţie materialul, îmbunătăţindu-l prin observaţii. Acelaşi efect benefic l-au avut şi discuţiile purtate cu dl prof. *Marius Marchitan*. Amândurora, autorul le mulţumeşte şi pe această cale.

**Bibliografie**

1. **N. Papacu** - *Asupra unui şir recurent*, Arhimede, 5-6/2000, 1-4.
2. **Gh. Oprişan** - *On a class of real sequences defined by recurence*, Gazeta Matematică (seria informare ştiinţifică şi perfecţionare metodică), XIV(XCIII), 2/1996, 82-90.
3. **C. Ţigăeru** - *Recurenţa* $a_n = 2a_{n-1}^2 - 1$ *şi problema XI.3 a Concursului Revistei "Sinus"*, Sinus, II.1(4)/2006.