# Pseudoinversă şi inversă generalizată ale unei aplicaţii liniare

*Adrian REISNER*[1]

**1. Pseudoinversă a unui endomorfism într-un spaţiu vectorial de dimensiune finită.** Fie $S$ un $\mathbb{R}$-spaţiu vectorial de dimensiune finită. Are loc

**Teorema 1.** *Fiind date două endomorfisme $u$, $v$ ale spaţiului $S$, dacă două din cele trei condiţii următoare:*

$$a)\ uvu = u, \qquad b)\ vuv = v, \qquad c)\ \operatorname{rang} u = \operatorname{rang} v$$

*sunt verificate, atunci a treia este de asemenea verificată.*

**Demonstraţie.** $\underline{a) \text{ şi } b) \Rightarrow c)}$ Avem: $\operatorname{rang} u = \operatorname{rang}(uvu) \le \operatorname{rang}(uv) \le \operatorname{rang} v$ din condiţia $a)$, $\operatorname{rang} v = \operatorname{rang}(vuv) \le \operatorname{rang}(vu) \le \operatorname{rang} u$ din condiţia $b)$. Deducem condiţia $c)$.

$\underline{a) \text{ şi } c) \Rightarrow b)}$ Condiţia $a)$ conduce, înmulţind la dreapta cu $v$, la egalitatea

$$uv = (uvu)v = u(vuv). \qquad (*)$$

Ţinând seama de $a)$, avem, pe de altă parte, că $\operatorname{rang} u \le \operatorname{rang}(uv)$ şi, fiindcă $\operatorname{rang}(uv) \le \operatorname{rang} u$, deducem egalitatea $\operatorname{rang}(uv) = \operatorname{rang} u$. Dar rangul endomorfismului $uv$ este rangul *restricţiei* endomorfismului $u$ la subspaţiul $\operatorname{Im} v$. Această restricţie $u_{/\operatorname{Im} v}$ este deci injectivă şi egalitatea $(*)$ poate fi simplificată cu $u$ la stânga, ceea ce închide demonstraţia.

$\underline{b) \text{ şi } c) \Rightarrow a)}$ rezultă imediat, endomorfismele $u$ şi $v$ având roluri simetrice în relaţiile $a)$, $b)$, $c)$. Teorema este demonstrată.

**Corolar.** *Fiind dat un endomorfism $u$ al spaţiului vectorial $S$, există un endomorfism $v$ (nu unic) verificând condiţiile $a)$, $b)$ şi $c)$.*

**Demonstraţie.** Ţinând seama de teoremă, ne propunem să construim endomorfismul $v$ verificând condiţiile $b)$ şi $c)$. Fie $v$ un astfel de endomorfism. Avem pentru $\forall y \in \operatorname{Im} v : vu(y) = y$. Deducem că, dacă $x \in \operatorname{Im} v \cap \operatorname{Ker} u$, $x = 0$ şi deci $\operatorname{Im} v \cap \operatorname{Ker} u = \{0\}$. Suma acestor două spaţii vectoriale este deci directă . Folosind condiţia $\operatorname{rang} u = \operatorname{rang} v$, deducem atunci că $\operatorname{Im} v \oplus \operatorname{Ker} u = S$.

Fiind dat endomorfismul $u$, fie $F$ un suplementar al subspaţiului vectorial $\operatorname{Ker} u$ şi $G$ un suplementar al spaţiului $\operatorname{Im} u$. Aplicaţia $u' : F \to \operatorname{Im} u$, $x \mapsto u(x)$ este un izomorfism. Definim aplicaţia $v$ prin restricţiile sale la cele două subspaţii suplementare $\operatorname{Im} u$ şi $G$ prin:

- $v_{/\operatorname{Im} u} = (u')^{-1}$,
- $v_{/G} = 0$.

Această aplicaţie $v$ este evident liniară şi verifică:

– $\operatorname{Im} v = \operatorname{Im}(u')^{-1} = F$, deci $\operatorname{rang} v = \dim F = \operatorname{rang} u$ şi rezultă că $v$ verifică $c)$;

– $\forall x \in S$, $v(x) \in F$, deci $vuv(x) = v\{u'[v(x)]\} = (vu')[v(x)] = v(x)$, i.e. $v$ verifică $vuv = v$, adică $b)$.

Corolarul este astfel stabilit.

---

[1] Cercetător, Centrul de Calcul E.N.S.T., Paris

**Observaţie.** Endomorfismul $v$ *nu este unic*: el depinde de *alegerea subspaţiilor* $F$ *şi* $G$ din demonstraţia corolarului.

**Definiţii.** Fiind dat endomorfismul $u$, orice endomorfism verificând condiţia $a)$ se numeşte *inversă generalizată* a lui $u$. Fiind dat endomorfismul $u$, orice endomorfism verificând condiţiile $a)$, $b)$ se numeşte *pseudoinversă* a lui $u$.

Cu aceleaşi notaţii ca în corolarul precedent, o inversă generalizată $v$ a endomorfismului $u$ este definită prin restricţiile sale la subspaţiile suplementare $\operatorname{Im} u$ şi $G$ prin:
- $v_{/\operatorname{Im} u} = (u')^{-1}$,
- $v_{/G}$ morfism oarecare aparţinând spaţiului $\mathcal{L}(G, S)$.

O inversă generalizată a endomorfismului $u$ depinde deci de *alegerea* subspaţiilor $F$, $G$ şi de *alegerea morfismului* $v_{/G}$. Vom numi $\operatorname{Ing}(u) = \{v \in \mathcal{L}(S) \,|uvu = u\}$.

**Observaţii.** 1) Inversa generalizată a unui *automorfism* $u$ este unică şi coincide cu inversa $u^{-1}$ a lui $u : \operatorname{Ing}(u) = \left\{u^{-1}\right\}$.

2) Fie $v \in \operatorname{Ing}(u)$. Avem:

endomorfismul $w = uv$ este un *proiector* ($w^2 = w$) de imagine $\operatorname{Im} u$:

$$w^2 = (uv)(uv) = (uvu)v = uv = w,$$

endomorfismul $w' = vu$ este un *proiector* ($w'^2 = w'$) de nucleu $\operatorname{Ker} u$:

$$w'^2 = (vu)(vu) = v(uvu) = vu = w'.$$

**Aplicaţie.** Vom nota cu aceeaşi literă un endomorfism al spaţiului vectorial $\mathbb{R}^n$ şi matricea acestui endomorfism în *baza canonică* a lui $\mathbb{R}^n$. Fiind date trei endomorfisme $A$, $B$, $C$ ale spaţiului vectorial $\mathbb{R}^n$, fie $\tilde{A} \in \operatorname{Ing}(A)$ şi $\tilde{C} \in \operatorname{Ing}(C)$. Are loc

**Teorema 2.** *Ecuaţia matriceală* $AXC = B$ *admite o soluţie* $X$ *dacă şi numai dacă avem* $A\tilde{A}B\tilde{C}C = B$.

**Demonstraţie.** Presupunând că $A\tilde{A}B\tilde{C}C = B$, deducem că matricea $X = \tilde{A}B\tilde{C}$ verifică $AXC = B$. Vom nota $X_0 = \tilde{A}B\tilde{C}$.

Invers, dacă există $X \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ verificând $AXC = B$, atunci avem $(A\tilde{A}A)X(C\tilde{C}C) = B$ şi, în consecinţă, $B = A\tilde{A}(AXC)\tilde{C}C = A\tilde{A}B\tilde{C}C$.

$\tilde{A}$ şi $\tilde{C}$ fiind două matrice oarecare aparţinând respectiv la $\operatorname{Ing}(A)$ şi $\operatorname{Ing}(C)$, notăm

$$K(A, C) = \left\{Y - \tilde{A}AYC\tilde{C} \mid Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right\}.$$

**Teorema 3.** *Soluţia generală a ecuaţiei matriceale* $AXC = B$ *este* $X = \tilde{A}B\tilde{C} + Z$*, unde* $Z \in K(A, C)$.

**Demonstraţie.** Soluţia generală a ecuaţiei matriceale $AXC = B$ este $X = X_0 + Z$, unde $X_0 = \tilde{A}B\tilde{C}$ (v. demonstraţia Teoremei 2) şi $Z$ este soluţia generală a ecuaţiei $AZC = O$. Ne propunem să justificăm echivalenţa următoare:

$$a) \quad AZC = O \quad \Leftrightarrow \quad b) \quad Z \in K(A, C).$$

$\underline{a) \Rightarrow b)}$ $Z = Z - O = Z - \tilde{A}(AZC)\tilde{C}$;

$\underline{b) \Rightarrow a)}$ $\forall Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, matricea $Z = Y - \tilde{A}AYC\tilde{C}$ verifică

$$AZC = AYC - A\tilde{A}AYC\tilde{C}C = AYC - (A\tilde{A}A)Y(C\tilde{C}C) = O$$

şi Teorema 3 este demonstrată.

**Exemplu.** Fie ecuaţia matriceală

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ unde } k \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Să găsim soluţia generală $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ a acestei ecuaţii.

Avem: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ing}(A)$; $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $\tilde{C} = C \in \mathrm{Ing}(C)$. Cum $B = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A\tilde{A}B\tilde{C}C$, ecuaţia (1) admite soluţii, o soluţie fiind matricea $X = \tilde{A}B\tilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ţinând seama de Teorema 3, soluţia generală a ecuaţiei (1) este

$$X = \tilde{A}B\tilde{C} + Y - \tilde{A}AYC\tilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + Y - \tilde{A}AYC\tilde{C},$$

unde $Y$ este o matrice oarecare aparţinând spaţiului de matrice $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Considerând $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$, $g$, $h$, $i$ numere reale oarecare, obţinem, cu $Y = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, că soluţia generală a ecuaţiei matriceale (1) este $X = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ k & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, unde $b$, $c$, $e$, $f$, $g$, $h$, $i$ sunt numere reale oarecare.

**2. Pseudoinversa unui endomorfism într-un spaţiu euclidian.** $E$ fiind un spaţiu euclidian, produsul scalar va fi notat $\langle , \rangle$. [Aceleaşi definiţii şi rezultate sunt valabile dacă spaţiul $E$ este un spaţiu hermitian, adică un $\mathbb{C}$ - spaţiu vectorial înzestrat cu un produs scalar, formă hermitiană pozitiv definită pe $E$.] Amintim definiţia şi teorema următoare:

**Definiţie şi teoremă.** *Fiind dat un endomorfism al spaţiului euclidian $E$, există un singur endomorfism $u^*$ al spaţiului $E$ verificând*

$$\forall x, y \in E, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle .$$

*Acest endomorfism se numeşte adjunctul endomorfismului $u$.*

*Avem* $\mathrm{Ker}\, u^* = (\mathrm{Im}\, u)^\perp$ *şi* $\mathrm{Im}\, u^* = (\mathrm{Ker}\, u)^\perp$.

Demonstrăm că $\mathrm{Ker}\, u^* = (\mathrm{Im}\, u)^\perp$; într-adevăr,

$$y \in (\mathrm{Im}\, u)^\perp \Leftrightarrow \forall x \in E,\ \langle u(x), y \rangle = 0 \Leftrightarrow \forall x \in E,\ \langle x, u^*(y) \rangle = 0 \Leftrightarrow y \in \mathrm{Ker}\, u^*.$$

Asemănător procedăm pentru egalitatea $\mathrm{Im}\, u^* = (\mathrm{Ker}\, u)^\perp$.

Fie $u$ un endomorfism al spaţiului euclidian $E$ . Notăm $K = (\operatorname{Ker} u)^{\perp}$ ortogonalul nucleului lui $u$ şi $I = (\operatorname{Im} u)^{\perp}$ ortogonalul imaginii endomorfismului $u$.

Notăm $P$ proiecţia ortogonală de imagine $K$ (de nucleu $\operatorname{Ker} u$), $P'$ proiecţia ortogonală de imagine $\operatorname{Im} u$ (de nucleu $I = (\operatorname{Im} u)^{\perp}$). Avem: $P'u = u = uP$; $P'(y) \in \operatorname{Im} u$, $\forall y \in E$; $u^{(-1)}P'(y)$ (imaginea reciprocă a elementului $P'(y)$) este o clasă modulo $\operatorname{Ker} u$ a spaţiului euclidian $E$ (atenţie: $u^{(-1)}$ nu este o aplicaţie!). Imaginea acestei clase prin proiecţia $P$ este un element unic al spaţiului $K$.

**Definiţie.** Aplicaţia liniară $u^{+} = Pu^{(-1)}P'$ se numeşte *pseudoinversă* a endomorfismului $u$.

**Teorema 4.** *Aplicaţia pseudoinversă $u^{+}$ a endomorfismului $u$ verifică relaţiile:*
*a) $uu^{+}u = u$,*
*b) $u^{+}uu^{+} = u^{+}$,*
*c) $uu^{+}$ şi $u^{+}u$ sunt endomorfisme ortogonale, i.e. $(uu^{+})^{*} = uu^{+}$, $(u^{+}u)^{*} = u^{+}u$. Mai mult, $u^{+}$ este singurul endomorfism al spaţiului $E$ verificând aserţiunile a), b) şi c).*

**Demonstraţie.** $P$ şi $P'$ fiind proiectori, avem $Pu^{+} = u^{+}P' = u^{+}$. Atunci:

$$u^{+}u = Pu^{(-1)}P'u = Pu^{(-1)}u = P, \text{ proiector ortogonal,}$$
$$uu^{+} = uPu^{(-1)}P' = uu^{(-1)}P' = P', \text{ proiector ortogonal,}$$

şi, în consecinţă, $uu^{+}u = uP = u$; $u^{+}uu^{+} = u^{+}P' = u^{+}$. În plus,

$$\operatorname{Im} u^{+} = \operatorname{Im} P = K = (\operatorname{Ker} u)^{\perp} = \operatorname{Im} u^{*}, \quad \operatorname{Ker} u^{+} = \operatorname{Ker} P' = I = (\operatorname{Im} u)^{\perp} = \operatorname{Ker} u^{*}.$$

Demonstrăm acum unicitatea endomorfismului $u^{+}$. Fie $u'$ un alt endomorfism verificând condiţiile a), b) şi c). Avem:

$$u' = u'uu' = u'u'^{*}u^{*} = u'u'^{*}(u^{*}u^{+*}u^{*}) = u'(uu')(uu^{+}) = u'uu^{+};$$
$$u'uu^{+} = u^{*}u'^{*}u^{+} = (u^{*}u^{+*}u^{*})u'^{*}u^{+} = (u^{+}u)(u'u)u^{+} = u^{+}uu^{+} = u^{+}.$$

Deci $u' = u^{+}$, c.c.t.d.

**Observaţie.** Am văzut în prima parte că o pseudoinversă a lui $u$ depinde în particular de alegerea subspaţiilor suplementare $F$ şi $G$ ale spaţiilor $\operatorname{Ker} u$ şi respectiv $\operatorname{Im} u$. În cazul în care $E$ este un spaţiu euclidian $F$ şi $G$ sunt unic definite prin $F = (\operatorname{Ker} u)^{\perp}$ şi $G = (\operatorname{Im} u)^{\perp}$, de unde unicitatea pseudoinversei.

Dacă $y$ este un vector oarecare al spaţiului euclidian $E$, notăm $x_0 = u^{+}(y)$. Avem

**Teorema 5.** *Vectorul $x_0 = u^{+}(y)$ verifică:*
*a) $\|ux_0 - y\|$ este minimum, i.e. $\|ux_0 - y\| \leq \|ux - y\|$, $\forall x \in E$;*
*b) $\|x_0\|$ este minim din toate elementele $x$ verificând $\|ux - y\| = \|ux_0 - y\|$.*

**Demonstraţie.** a) $\|ux_0 - y\| = \left\|uu^{+}y - y\right\| = \|P'y - y\|$,

$$\|ux - y\|^2 = \|u(x - x_0) + ux_0 - y\|^2 = \|u(x - x_0) + P'y - y\|^2 =$$
$$= \|u(x - x_0)\|^2 + \|P'y - y\|^2 \geq \|ux_0 - y\|^2 .$$

b) Avem $\|ux - y\| = \|ux_0 - y\|$ numai când $u(x - x_0) = 0$. În cazul acesta, $x = x_0 + z$, unde $x_0 \in K = (\operatorname{Ker} u)^{\perp}$ şi $z \in \operatorname{Ker} u$. Deci $\|x\|^2 = \|x_0\|^2 + \|z\|^2 \geq \|x_0\|^2$ şi deducem b).

**Observaţie.** Din teorema precedentă deducem că $x_0 = u^+(y)$ este cea mai bună soluţie apropiată în normă a ecuaţiei $y = ux$.

**Pseudoinversa unei matrice.** Dacă alegem în spaţiul euclidian $E$ o bază ortonormată $\mathcal{B}$, obţinem $U$-matricea endomorfismului $u$ în această bază: $Mat(u^*,\mathcal{B}) = U^* = U^T$.[În cazul în care $E$ este hermitian avem $Mat(u^*,\mathcal{B}) = U^* = \overline{U}^T$.]

Traducând cele de mai sus în limbaj matriceal, obţinem

*Fiind dată o matrice $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, există o singură matrice $V$ verificând condiţiile următoare:*

$$UVU = U, \quad VUV = V, \quad (UV)^* = UV, \quad (VU)^* = VU.$$

*Această unică matrice $V$ se numeşte pseudoinversa matricei $U$ şi se notează $U^+$.*

$X_0 = U^+Y$ este cea mai bună aproximaţie cuadratică a ecuaţiei $UX = Y$.

**Exemplu de calcul al pseudoinversei unei matrice.** Fie matricea

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Să calculăm matricea $U^+$.

Matricea $U$ fiind simetrică, avem $\operatorname{Ker} u = (\operatorname{Im} u)^\perp$.

Fie $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ baza canonică a spaţiului $\mathbb{R}^3$ înzestrat cu produsul scalar canonic. Pentru endomorfismul $u$ asociat matricei $U$ în această bază, avem:

$$\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}\{e_2, e_1 + e_3\}, \quad \operatorname{Ker} u = \mathbb{R}(e_1 - e_3).$$

Endomorfismul $v$ de matrice $U^+$ în baza canonică $\mathcal{B}$ verifică atunci

$$\operatorname{Ker} v = (\operatorname{Im} u)^\perp = \operatorname{Ker} u; \quad \operatorname{Im} v = (\operatorname{Ker} u)^\perp = \operatorname{Im} u.$$

Pe de altă parte:

$uvu(e_2) = u(e_2) \Rightarrow uv(e_2) = u(e_2) \Rightarrow v(e_2) = e_2 + \lambda(e_1 - e_3)$; $v(e_2) \in \operatorname{Im} v = \operatorname{Im} u \Rightarrow \lambda = 0$, deci $v(e_2) = e_2$;

$uvu(e_1) = u(e_1) \Rightarrow uv(e_1 + e_3) = e_1 + e_3 = u(\frac{e_1 + e_3}{2}) \Rightarrow v(e_1 + e_3) = \frac{e_1 + e_3}{2} + \mu\,(e_1 - e_3)$; $v(e_1 + e_3) \in \operatorname{Im} u \Rightarrow \mu = 0$, deci $v(e_1 + e_3) = \frac{e_1 + e_3}{2}$. Dat fiind că $v(e_1 - e_3) = 0$ [$\operatorname{Ker} v = \operatorname{Ker} u$], deducem că $v(e_1) = v(e_3) = \frac{e_1 + e_3}{4}$.

Finalmente matricea $U^+$ este

$$U^+ = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$