Asupra problemei 3639 din Gazeta Matematică, v. XXXIII (1927–1928)

D. M. BĂTINEŢU-GIURGIU[1]

În volumul XXXIII (1927-1928) al *Gazetei Matematice*, la pagina 280, **D. V. Ionescu**[2] a propus problema 3639 cu următorul enunţ:

Să se demonstreze că

$$\lim_{m\to\infty}\left(m\left(\left(1+\frac{1}{m}\right)^m-e\right)\right)=-\frac{e}{2}, \tag{1}$$

$$\lim_{m\to\infty}\left(m\left(m\left(\left(1+\frac{1}{m}\right)^m-e\right)+\frac{e}{2}\right)\right)=\frac{11e}{24}, \tag{2}$$

$$\lim_{m\to\infty}\left(m\left(m\left(m\left(\left(1+\frac{1}{m}\right)^m-e\right)+\frac{e}{2}\right)-\frac{11e}{24}\right)\right)=-\frac{21e}{48}, \tag{3}$$

e fiind baza logaritmilor neperieni.

Soluţia acestei probleme a fost dată de d-nii *G. G. Constantinescu*, *Ştefan E. Olteanu*, *George Silaş* în Gazeta Matematică, vol. XLII (1936-1937), pag. 36-37.

Mai întâi se arată că:

$$e_m=\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=e\left(1-\frac{1}{2m}+\frac{11}{24m^2}-\frac{21}{48m^3}+\frac{a_m}{m^4}\right), \tag{4}$$

unde $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{a_m}{m^4}=0$. Din (4) rezultă limitele din enunţ.

În această Notă ne propunem să generalizăm limita (1). Fie $(x_n)_{n\geq1}$ un şir convergent de numere reale cu $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x\overset{\text{not}}{=}D_0(x_n)\in\mathbb{R}$.

Definiţie [1]. Spunem că şirul $(x_n)_{n\geq1}$ admite o derivată dacă există $\lim\limits_{n\to\infty}(n(x_n-x))\overset{\text{not}}{=}D(x_n)\in\overline{\mathbb{R}}$. Dacă $D(x_n)\in\mathbb{R}$, spunem că şirul $(x_n)_{n\geq1}$ este derivabil.

Propoziţia 1. *Şirul* $(u_n)_{n\geq1}$, $u_n=\left(1+\dfrac{r}{n}\right)^s$, *unde* $r\in\mathbb{R}_+^*$, $s\in\mathbb{R}_+$ *este derivabil.*

Demonstraţie. Dacă $s=0$, atunci $u_n=1$, $\forall n\in\mathbb{N}$; deci $n(u_n-1)=0$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}(n(u_n-1))=0$.

Dacă $s\in\mathbb{R}_+^*$, atunci $D_0(u_n)=\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{r}{n}\right)^s=1$. Deci

$$\lim_{n\to\infty}(n(u_n-1))=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{u_n-1}{\ln u_n}\ln u_n^n\right)=1\cdot\lim_{n\to\infty}(\ln u_n^n)=\ln\left(\lim_{n\to\infty}u_n^n\right)=$$

$$=\ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^{sn}\right)=\ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right)^{rs}\right)=\ln e^{rs}=rs\in\mathbb{R},$$

[1] Profesor, Colegiul Naţional "Matei Basarab", Bucureşti
[2] Matematician român (1901–1985)

ceea ce demonstrează propoziţia.

Propoziţia 2. *Dacă* $(x_n)_{n\geq 1}$ *este un şir convergent cu* $D_0(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n =$ $= x \in \mathbb{R}^*$, *atunci şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *este derivabil dacă şi numai dacă există* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{x}\right)^n =$ $= d \in \mathbb{R}_+^*$.

Demonstraţie. Este evident că

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{x}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{x_n-x}{x}\right)^{\frac{x}{x_n-x}}\right)^{\frac{n(x_n-x)}{x}} = e^{\frac{1}{x}\lim\limits_{n\to\infty}(n(x_n-x))}. \qquad (5)$$

Relaţia (5) ne arată că, dacă există $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{x}\right)^n = d \in \mathbb{R}_+^*$, atunci $d = e^{\frac{1}{x}\lim\limits_{n\to\infty}(n(x_n-x))}$. Prin urmare există şi $D\left(x_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(n\left(x_n-x\right)\right) = x\ln d \in \mathbb{R}$, adică şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este derivabil.

Reciproc, relaţia (5) ne arată că, dacă şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este derivabil, atunci există $D\left(x_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(n\left(x_n-x\right)\right) \in \mathbb{R}$, deci există şi $d = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{x}\right)^n = e^{\frac{1}{x}\lim\limits_{n\to\infty}(n(x_n-x))} =$ $e^{\frac{1}{x}D(x_n)} \in \mathbb{R}_+^*$. Cu aceasta propoziţia este demonstrată.

În continuare vom nota $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = D_0\left(x_n\right) = x \in \mathbb{R}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = D_0\left(y_n\right) = y \in \mathbb{R}$.

Propoziţia 3 [**2**]. *Dacă şirurile* $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ *sunt derivabile, atunci şirul* $(x_n - y_n)_{n\geq 1}$ *este derivabil şi* $D\left(x_n y_n\right) = D\left(x_n\right)y + xD\left(y_n\right)$.

Demonstraţie. Conform enunţului avem:

$$D_0\left(x_n\right) = x = \lim_{n\to\infty} x_n, \quad D_0\left(y_n\right) = y = \lim_{n\to\infty} y_n \in \mathbb{R}$$

şi, de asemenea,

$$D\left(x_n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(n\left(x_n-x\right)\right), \quad D\left(y_n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(n\left(y_n-y\right)\right) \in \mathbb{R}.$$

Prin urmare, trebuie de arătat că

$$D\left(x_n y_n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(n\left(x_n y_n - xy\right)\right) \in \mathbb{R}.$$

Într-adevăr,

$$n\left(x_n y_n - xy\right) = n\left(x_n y_n - x y_n + x y_n - xy\right) = y_n n\left(x_n - x\right) + xn\left(y_n - y\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

de unde, prin trecere la limită cu $n \to \infty$, deducem:

$$D(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty}\left(n\left(x_n y_n - xy\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(n\left(x_n - x\right)\right)\lim_{n\to\infty} y_n + x\lim_{n\to\infty}\left(n\left(y_n - y\right)\right) =$$
$$= D\left(x_n\right)D_0\left(y_n\right) + D_0\left(x_n\right)D\left(y_n\right).$$

Cu aceasta propoziţia este demonstrată.

În continuare, fie $r \in \mathbb{R}_+^*$, $s \in \mathbb{R}_+$ şi vom adopta notaţiile:

$$e_n\left(r,s\right) = \left(1+\frac{r}{n}\right)^{n+s}, \quad e_n\left(r\right) = e_n\left(r,0\right) = \left(1+\frac{r}{n}\right)^n,$$
$$u_n = \left(1+\frac{r}{n}\right)^s, \quad e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Se observă că $\lim\limits_{n\to\infty} e_n(r,s) = e^r$, $\lim\limits_{n\to\infty} e_n(r,0) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{r}{n}\right)^n = e^r$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = e$.

Propoziţia 4. *Şirul* $(e_n(r))_{n\geq 1}$ *este derivabil şi*

$$D(e_n(r)) = -\frac{r^2 e^r}{2}. \tag{6}$$

Demonstraţie. Conform inegalităţilor Bencze-Tóth din [**3**] avem

$$\frac{e^r}{an+b} < e^r - e_n(r) < \frac{e^r}{an+c},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \text{unde } a = \frac{2}{r^2};\ b,c \in \mathbb{R}_+. \tag{7}$$

Prin înmulţire cu n, deducem că

$$\frac{e^r n}{an+b} < n\left(e^r - e_n(r)\right) < \frac{e^r n}{an+c}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{8}$$

De aici, prin trecere la limită cu $n \to \infty$, rezultă că

$$D(e_n(r)) = \lim_{n\to\infty}\left(n\left(e_n(r) - e^r\right)\right) = -\frac{e^r}{a} = -\frac{r^2 e^r}{2}.$$

Teoremă. *Şirul* $(e_n(r,s))_{n\geq 1}$ *este derivabil şi*

$$D(e_n(r,s)) = \lim_{n\to\infty}\left(n\left(e_n(r,s) - e^r\right)\right) = \frac{re^r}{2}(2s-r). \tag{9}$$

Demonstraţie. Să observăm că $e_n(r,s) = e_n(r)\,u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Deoarece şirurile $(e_n(r))_{n\geq 1}$ şi $(u_n)_{n\geq 1}$ sunt şiruri derivabile, conform Proprietăţii 3 rezultă că şirul $(e_n(r,s))_{n\geq 1} = (e_n(r))_{n\geq 1}\cdot(u_n)_{n\geq 1}$ este un şir derivabil şi

$$D(e_n(r,s)) = D(e_n(r)\,u_n) = D(e_n(r))\lim_{n\to\infty} u_n + \lim_{n\to\infty} e_n(r)\,D(u_n) =$$

$$= -\frac{r^2 e^r}{2}\cdot 1 + e^r rs = \frac{re^r}{2}(2s-r).$$

Observaţie. În particular, dacă $r = 1$, $s = 0$ obţinem relaţia (1) din Problema 3639 a lui **D. V. Ionescu**, iar dacă $r = s = 1$ obţinem că

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - e\right)\right) = \frac{e}{2}.$$

Bibliografie

1. **M. Bătineţu-Giurgiu, D. M. Bătineţu-Giurgiu, M. Bencze** - *Şiruri derivabile*, Gazeta Matematică, nr. 9/2005, 410-420.
2. **M. Bătineţu-Giurgiu, D. M. Bătineţu-Giurgiu, M. Bencze** - *Derivable Sequences*, Octogon Mathematical Magazine, 13 (2005), no. 2, 936-945.
3. **M. Bencze, L. Tóth** - *O generalizare a inegalităţii Pólya-Szegö*, Arhimede, nr. 3-4/2005, 7-10.