Criterii de congruenţă a triunghiurilor

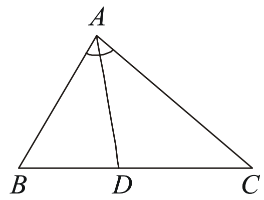
Marius APETRII[1] ***şi Cristian-Cătălin BUDEANU***[2]

În *RecMat - 2/2005*, elevilor de clasa a VII-a le este propusă următoarea problemă:

VII.63. *Fie triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ cu $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ şi bisectoarele $[AD]$, $[A'D']$ congruente. Să se arate că $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ (enunţ adaptat).*

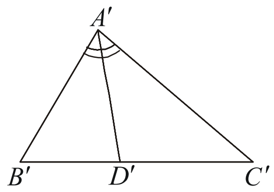
Petru Asaftei, Iaşi

În cele ce urmează, dorim să stabilim condiţii suficiente pentru congruenţa a doua triunghiuri care au două bisectoare congruente. Vom considera mereu îndeplinită ipoteza



(I) *Triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ au bisectoarele $[AD]$ şi $[A'D']$ congruente, cu $D \in (BC)$, $D' \in (B'C')$, iar $m(\widehat{ADB}) \leq 90°$, $m(\widehat{A'D'B'}) \leq 90°$.*

Propoziţia 1. *În ipoteza (I), dacă $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}$ şi $\widehat{BDA} \equiv \widehat{B'D'A'}$, atunci $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.*



Demonstraţie. Din congruenţa triunghiurilor ADB şi $A'D'B'$ (U.L.U.) rezultă că $AB = A'B'$ şi $\widehat{ABD} \equiv \widehat{A'B'D'}$, de unde concluzia urmează conform U.L.U.

Propoziţia 2. *În ipoteza (I), dacă $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}$ şi $AB = A'B'$, atunci $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.*

Demonstraţie. Obţinem că $\triangle ABD \equiv \triangle A'B'D'$ (U.L.U.), de unde $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$. Folosind U.L.U., deducem că $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Propoziţia 3. *În ipoteza (I), dacă $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}$ şi $BD = B'D'$, atunci $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.*

Demonstraţie. Deoarece $\widehat{BAD} \equiv \widehat{B'A'D'}$, $AD = A'D'$, $BD = B'D'$ şi $\widehat{ADB}$, $\widehat{A'D'B'}$ sunt ambele neobtuze, conform L.L.U. rezultă că $\triangle ADB \equiv \triangle A'D'B'$ şi acum concluzia este imediată.

Propoziţia 4. *În ipoteza (I), dacă $AB = A'B'$ şi $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$, atunci $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.*

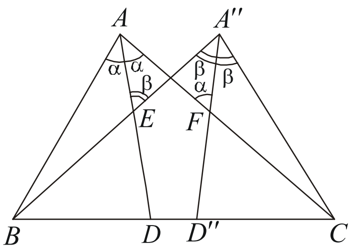
Demonstraţie. Deoarece $AB = A'B'$, $AD = A'D'$, $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ şi $\widehat{ADB}$, $\widehat{A'D'B'}$ sunt ambele neobtuze, conform L.L.U. rezultă că $\triangle ADB \equiv \triangle A'D'B'$, de unde concluzia anunţată.

Propoziţia 5. *În ipoteza (I), dacă $\widehat{ADB} \equiv \widehat{A'D'B'}$ şi $BC = B'C'$, atunci $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.*

Demonstraţie. Considerăm punctul A'' în acelaşi semiplan cu A faţă de BC, astfel încât $\triangle A''BC \equiv \triangle A'B'C'$. Fie $[A''D''$ bisectoarea lui $\widehat{BA''C}$, $D'' \in (BC)$, iar $\{E\} = A''B \cap AD$, $\{F\} = A''D'' \cap AC$. Din $\widehat{ADB} \equiv \widehat{A''D''B}$ rezultă că $AD \parallel A''D''$

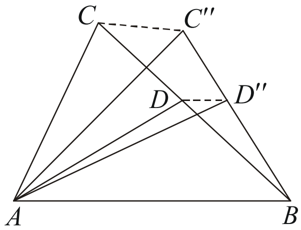
[1] Asist. drd., Facultatea de Matematică, Univ. Al. I. Cuza, Iaşi
[2] Profesor, C. N. Emil Racoviţă, Iaşi

şi cum $AD = A''D''$, obţinem că $ADD''A''$ este paralelogram. Astfel, $AA'' \parallel BC$ şi deci $A'' \in \operatorname{Ext} ABC$, de unde $m(\widehat{A''CB}) \geq m(\widehat{ACB})$ şi $m(\widehat{ABC}) \geq m(\widehat{A''BC})$ sau invers; ne plasăm în prima situaţie.



Din $AD \parallel A''D''$ obţinem că $m(\widehat{EAC}) = m(\widehat{AFA''}) = \alpha$ şi $m(\widehat{AEA''}) = m(\widehat{EA''F}) = \beta$. Atunci $m(\widehat{ABE}) = 180^\circ - \alpha - (180^\circ - \beta) = \beta - \alpha$ şi $m(\widehat{A''CF}) = 180^\circ - \beta - (180^\circ - \alpha) = \alpha - \beta$. Cum $\alpha - \beta \geq 0$, deducem că $\alpha = \beta$. Astfel, $m(\widehat{A''CA}) = 0$, deci C, A'', A sunt coliniare şi $m(\widehat{ABA''}) = 0$, deci B, A'', A sunt coliniare. În concluzie, $A'' = A$, de unde $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Propozţia 6. *În ipoteza (I), dacă $AB = A'B'$ şi $AC = A'C'$, atunci $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$. (Problema VII.63 din RecMat - 2/2005)*



Demonstraţia 1. Considerăm punctul C'' în acelaşi semiplan cu C faţă de AB, astfel încât $\triangle ABC'' \equiv \triangle A'B'C'$. Fie $[AD''$ bisectoarea lui $\widehat{BAC''}$, $D'' \in (BC'')$. Din teorema bisectoarei avem că $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{AB}{AC}$ şi $\dfrac{BD''}{C''D''} = \dfrac{AB}{AC''}$ şi cum $AC'' = AC$, deducem că $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{BD''}{C''D''}$, deci $DD'' \parallel CC''$. Triunghiurile ACC'' şi ADD'' sunt isoscele şi atunci A se află atât pe mediatoarea lui $[DD'']$, cât şi pe cea a lui $[CC'']$. Însă cele două mediatoare sunt paralele sau coincid; rămâne cea de-a doua variantă şi astfel rezultă că A aparţine medianei din B în $\triangle BCC''$, fals. Deducem că $C = C''$, adică $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Observaţia 1. În această demonstraţie nu folosim explicit faptul că AD şi $A'D'$ sunt bisectoare, ci doar egalitatea rapoartelor $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{B'D'}{D'C'}$. Astfel, autorul problemei, **Petru Asaftei**, observă că rămâne adevărată concluzia dacă înlocuim în ipoteză bisectoarele $[AD]$ şi $[A'D']$ cu două ceviene ce determină rapoarte egale pe latura pe care cad. În particular, concluzia rămâne adevărată pentru $[AD]$, $[A'D']$ mediane sau simediane.

Observaţia 2. Am putea denumi rezultatul Propoziţiei 6 *cazul de congruenţă Latură-Bisectoare-Latură.* **Claudiu-Ştefan Popa** ridică problema funcţionării unor cazuri *Bisectoare-Latură-Bisectoare* sau *Bisectoare-Bisectoare-Bisectoare*; propunem cititorului demonstrarea sau invalidarea acestora. Pentru o eventuală justificare, mai promiţătoare pare calea urmată în

Demonstraţia 2. Cu notaţiile uzuale, $l_a = \dfrac{2bc}{b+c} \cos \dfrac{A}{2}$ şi $l'_a = \dfrac{2b'c'}{b'+c'} \cos \dfrac{A'}{2}$. Cum $l_a = l'_a$, $b = b'$, $c = c'$, obţinem $\cos \dfrac{A}{2} = \cos \dfrac{A'}{2}$, de unde $A = A'$. Concluzia rezultă din L.U.L.

Propoziţia 7. *În ipoteza (I), dacă $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$ şi $BC = B'C'$, atunci*

$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Demonstraţie. Mai întâi, să observăm că:

(i) $m(\widehat{BDA}) < 90° \Leftrightarrow AB < AC$. Într-adevăr:

$$m(\widehat{BDA}) < 90° \Leftrightarrow BD > c\cos B \Leftrightarrow \frac{ac}{b+c} > \frac{a^2+c^2-b^2}{2a} \Leftrightarrow$$
$$2a^2c > a^2(b+c) + (c-b)(b+c)^2 \Leftrightarrow (b-c)\left[(b+c)^2 - a^2\right] > 0 \Leftrightarrow b > c.$$

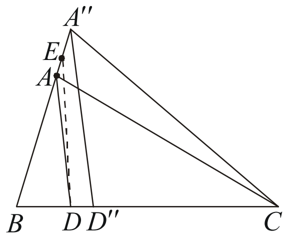
(ii) În $\triangle ABC$, $AB < AC$, considerăm A'' cu $A \in (BA'')$ şi fie $[AD$, $[A''D''$ bisectoarele unghiurilor $\widehat{BAC}$, respectiv $\widehat{BA''C}$, $D, D'' \in (BC)$; pe segmentul (BC) avem atunci ordinea $B - D - D'' - C$. Într-adevăr, dacă $AC = b$, $BC = a$, $AB = c$, $A''B = c''$, $A''C = b''$ şi $m(\widehat{ABC}) = \alpha$, avem că $\frac{a}{c} + \frac{a}{c''} > 2\cos\alpha$. Relaţia este evidentă pentru $\alpha \geq 90°$, iar pentru $\alpha < 90°$, folosind teorema cosinusului şi ipoteza $c < b$, avem:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\alpha \Rightarrow a^2 > 2ac\cos\alpha \Rightarrow \frac{a}{c} > 2\cos\alpha \Rightarrow \frac{a}{c} + \frac{a}{c''} > 2\cos\alpha.$$

Atunci

$$\left(\frac{a}{c} - \frac{a}{c''}\right)\left(\frac{a}{c} + \frac{a}{c''}\right) > \left(\frac{a}{c} - \frac{a}{c''}\right) \cdot 2\cos\alpha \Rightarrow$$
$$\frac{a^2}{c^2} > \frac{b''^2}{c''^2} \Rightarrow \frac{b}{c} > \frac{b''}{c''} \Rightarrow \frac{D''C}{D''B} < \frac{DC}{DB} \Rightarrow D \in (BD'').$$

Revenim la demonstraţia propoziţiei; putem presupune fără a restrânge generalitatea că $AB \leq A'B'$. Considerăm $A'' \in [BA$ astfel încât $\triangle A''BC \equiv \triangle A'B'C'$ (deci $A''B = A'B'$). Cum $A \in (BA'')$, conform observaţiei (ii), pe (BC) avem ordinea $B - D - D'' - C$ şi atunci $m(\widehat{BAC}) > m(\widehat{BA''C})$, adică $m(\widehat{BDA}) < m(\widehat{BD''A''})$. Construim $DE \parallel A''D''$, $E \in AB$. Cum $m(\widehat{BAD}) < 90°$, atunci $m(\widehat{EAB}) > 90°$ şi deci $ED > AD$. Din $DE \parallel D''A''$ rezultă că $\frac{DE}{D''A''} = \frac{BE}{BA''} < 1$, de unde $DE < D''A''$. Obţinem astfel că $AD < A''D''$, fals. Rămâne că $AB = A''B$, prin urmare $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.



Propoziţia 8. *În ipoteza (I), dacă $AB = A'B'$ şi $BC = B'C'$, atunci $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.*

Demonstraţie. Presupunem prin absurd că $m(\widehat{ABC}) < m(\widehat{A'B'C'})$, deci $AC < A'C'$. Cu notaţiile uzuale, avem:

$$AD^2 = \left(\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}\right)^2 = \frac{bc\left[(b+c)^2 - a^2\right]}{(b+c)^2} = bc\left[1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right] <$$
$$< b'c\left[1 - \frac{a^2}{(b'+c)^2}\right] = \frac{b'c\left[(b'+c)^2 - a^2\right]}{(b'+c)^2} = \frac{2b'c}{b'+c}\cos\frac{A'}{2} = AD'^2,$$

deci, $AD < AD'$, ceea ce contrazice ipoteza. Presupunerea făcută este falsă, prin urmare $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.