Asupra similitudinii a două triunghiuri echilaterale

Cătălin ŢIGĂERU[1]

Un rezultat cunoscut (vezi [**2**] sau [**6**] pentru demonstraţia sintetică) afirmă că două triunghiuri direct asemenea se transformă unul în celălalt sau prin intermediul unei translaţii sau printr-o similitudine. În cazul a două triunghiuri echilaterale, deoarece acestea pot fi în trei moduri direct asemenea, vom avea, în general, trei centre de similitudine distincte. În această Notă ne propunem să demonstrăm că aceste trei centre coincid dacă şi numai dacă centrele celor două triunghiuri coincid.

Reamintim că similitudinea este transformarea plană obţinută prin compunerea unei omotetii cu o rotaţie, ambele având acelaşi centru. Vom folosi notaţia $S_{M_0}(k,\varphi)$ pentru similitudinea de centru M_0, de raport $k>0$ şi unghi $\varphi\in[0,2\pi)$.

În formalismul complex, pe care îl vom folosi în demonstraţii, dacă afixul punctului M_0 este z_0 şi al punctului oarecare M este z, atunci expresia algebrică a similitudinii este

$$S_{M_0}(k,\varphi)(z)=z_0+ke^{i\varphi}(z-z_0).$$

Propoziţia 1. *Fie $A_1A_2A_3$ şi $B_1B_2B_3$ două triunghiuri la fel orientate, asemenea în această ordine; atunci sau unul se obţine din celălalt printr-o translaţie sau există un punct Ω şi o similitudine de centru Ω care transformă triunghiul $A_1A_2A_3$ în triunghiul $B_1B_2B_3$.*

Demonstraţie. Notăm afixele vârfurilor triunghiurilor date cu a_1, a_2, a_3, respectiv b_1, b_2, b_3; fiind la fel orientate, se verifică relaţia $\dfrac{a_2-a_1}{a_3-a_1}=\dfrac{b_2-b_1}{b_3-b_1}$, din care deducem

$$a_3(b_2-b_1)=a_1(b_2-b_1)+(b_3-b_1)(a_2-a_1). \qquad (*)$$

Să presupunem că triunghiurile nu se obţin unul din altul printr-o translaţie, ceea ce implică, de exemplu, că relaţia $(a_2-a_1)-(b_2-b_1)\neq 0$ este adevărată. Determinăm similitudinea care transformă punctul A_1 în B_1 şi A_2 în B_2 calculând numerele complexe ω şi $ke^{i\varphi}$ astfel ca $b_1=\omega+ke^{i\varphi}(a_1-\omega)$, $b_2=\omega+ke^{i\varphi}(a_2-\omega)$.

Scăzând cele două relaţii şi înlocuind rezultatul obţinut într-una din relaţiile de mai sus, ajungem la:

$$ke^{i\varphi}=\frac{b_2-b_1}{a_2-a_1},\quad \omega=\frac{b_1a_2-b_2a_1}{(a_2-a_1)-(b_2-b_1)}. \qquad (1)$$

Demonstrăm că similitudinea definită de (1) aplică punctul A_3 în B_3, ceea ce, în limbajul afixelor, înseamnă $S_\omega(k,\varphi)(a_3)=b_3$. În adevăr, se obţine:

$$S_\omega(k,\varphi)(a_3)=\omega+ke^{i\varphi}(a_3-\omega)=$$
$$=\frac{b_1a_2-b_2a_1}{(a_2-a_1)-(b_2-b_1)}+\frac{b_2-b_1}{a_2-a_1}\cdot\frac{a_3(a_2-a_1)-a_3(b_2-b_1)-b_1a_2+b_2a_1}{(a_2-a_1)-(b_2-b_1)};$$

folosind relaţia (*) rezultă că $a_3(a_2-a_1)-a_3(b_2-b_1)-b_1a_2+b_2a_1=(a_2-a_1)(a_3-b_3)$,

[1] Universitatea "Ştefan cel Mare", Suceava

ceea ce, după înlocuire, conduce la

$$S_\omega(k,\varphi)(a_3) = \frac{b_1a_2 - b_2a_1 + (b_2-b_1)(a_3-b_3)}{(a_2-a_1)-(b_2-b_1)} = \\ = \frac{b_1a_2 - b_2a_1 + a_3(b_2-b_1) - b_3(b_2-b_1)}{(a_2-a_1)-(b_2-b_1)},$$

de unde, folosind din nou (*), obţinem:

$$S_\omega(k,\varphi)(a_3) = \frac{b_1a_2 - b_2a_1 + a_1(b_2-b_1) + (b_3-b_1)(a_2-a_1) - b_3(b_2-b_1)}{(a_2-a_1)-(b_2-b_1)} = \\ = \frac{((a_2-a_1)-(b_2-b_1))b_3}{(a_2-a_1)-(b_2-b_1)} = b_3,$$

adică ceea ce trebuia demonstrat.

Geometric, demonstraţia de mai sus înseamnă următoarele: introducem notaţiile $C_{(ij),(kl)} = A_iA_j \cap B_kB_l$, unde $(ij),(kl) \in \{(12),(23),(31)\}$; cititorul va observa uşor că patrulaterele

$$A_1C_{(12),(12)}B_1C_{(31),(31)}, \quad A_2C_{(23),(23)}B_2C_{(12),(12)}, \quad A_3C_{(31),(31)}B_3C_{(23),(23)}$$

sunt inscriptibile, nu neapărat în această ordine, şi că cercurile circumscrise lor sunt concurente în centrul de similitudine Ω.

Să presupunem că triunghiurile $A_1A_2A_3$ şi $B_1B_2B_3$ sunt echilaterale; atunci, ca triunghiuri la fel orientate, ele sunt asemenea în trei moduri distincte, anume în ordinile: $\begin{pmatrix} A_1A_2A_3 \\ B_1B_2B_3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} A_1A_2A_3 \\ B_3B_1B_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} A_1A_2A_3 \\ B_2B_3B_1 \end{pmatrix}$. Figura obţinută conţine nouă patrulatere inscriptibile, cărora le corespund nouă cercuri circumscrise, trei câte trei concurente în centrele de similitudine corespunzătoare. Vom nota centrele de similitudine respectiv cu Ω_1, Ω_2, Ω_3 (vezi Figura 1) şi afixele lor cu ω_1, ω_2, ω_3; atunci, conform (1), expresiile analitice ale afixelor sunt:

$$\omega_1 = \frac{b_1a_2 - b_2a_1}{(a_2-a_1)-(b_2-b_1)}, \quad \omega_2 = \frac{b_3a_2 - b_1a_1}{(a_2-a_1)-(b_1-b_3)}, \quad \omega_3 = \frac{b_2a_2 - b_3a_1}{(a_2-a_1)-(b_3-b_2)}. \tag{2}$$

Rezultatul central al notei este

Propoziţia 2. *Centrele de similitudine Ω_1, Ω_2, Ω_3 coincid dacă şi numai dacă triunghiurile echilaterale $A_1A_2A_3$ şi $B_1B_2B_3$ au acelaşi centru.*

Demonstraţie. Afirmaţia reciprocă fiind imediată, ne ocupăm de demonstraţia directei. Avem succesiv:

$$\frac{\omega_1 - a_1}{\omega_1 - a_2} = \frac{\dfrac{b_1a_2 - b_2a_1}{(a_2-a_1)-(b_2-b_1)} - a_1}{\dfrac{b_1a_2 - b_2a_1}{(a_2-a_1)-(b_2-b_1)} - a_2} = \frac{(a_2-a_1)(b_1-a_1)}{(a_2-a_1)(b_2-a_2)} = \frac{b_1-a_1}{b_2-a_2};$$

de asemenea

$$\frac{\omega_1 - b_1}{\omega_1 - b_2} = \frac{(b_2-b_1)(b_1-a_1)}{(b_2-b_1)(b_2-a_2)} = \frac{b_1-a_1}{b_2-a_2},$$

ceea ce conduce la egalitatea

$$\frac{\omega_1 - a_1}{\omega_1 - a_2} = \frac{\omega_1 - b_1}{\omega_1 - b_2} = \frac{b_1-a_1}{b_2-a_2}. \tag{3}$$

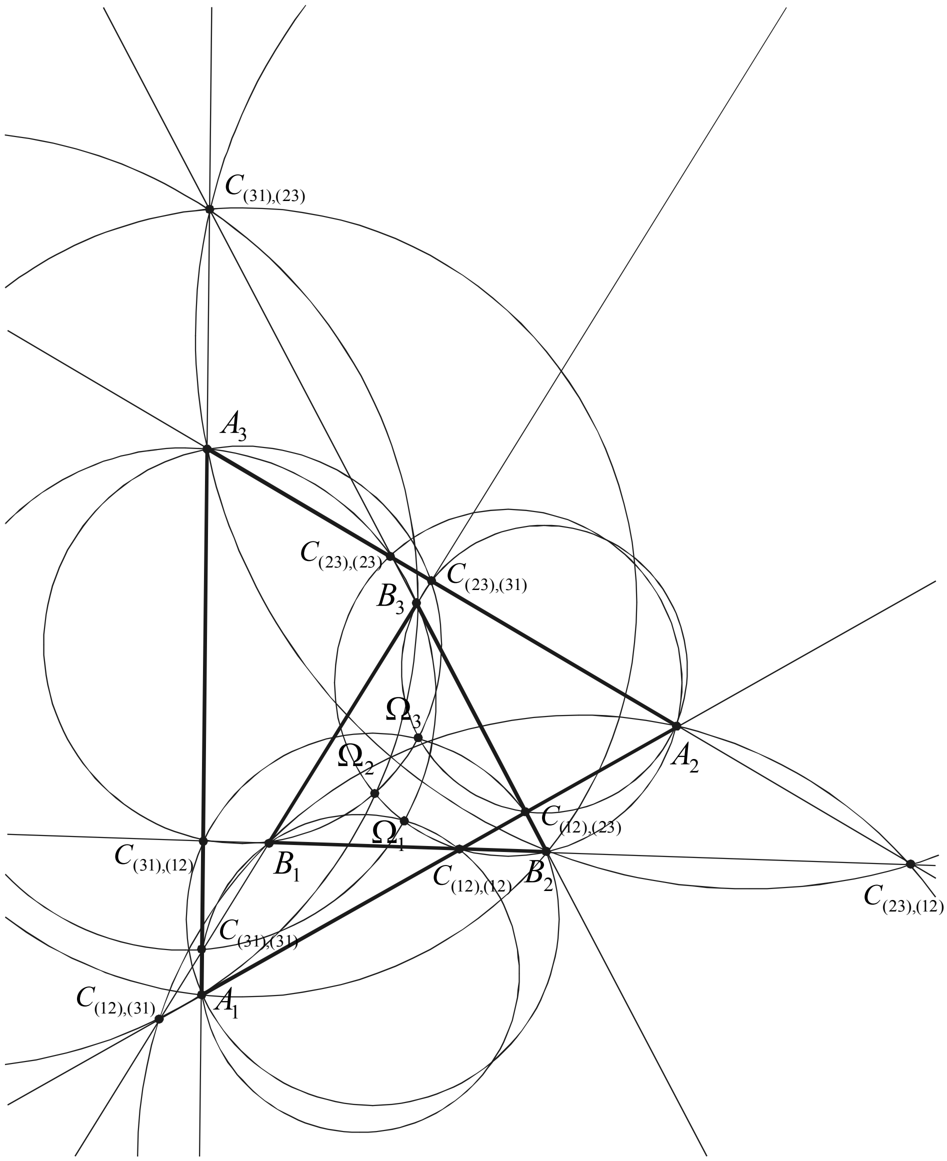

Figura 1

În mod analog se demonstrează următorul şir de egalităţi:

$$\frac{\omega_1 - a_2}{\omega_1 - a_3} = \frac{\omega_1 - b_2}{\omega_1 - b_3} = \frac{b_2 - a_2}{b_3 - a_3}; \quad (4) \qquad \frac{\omega_1 - a_3}{\omega_1 - a_1} = \frac{\omega_1 - b_3}{\omega_1 - b_1} = \frac{b_3 - a_3}{b_1 - a_1}; \quad (5)$$

$$\frac{\omega_2 - a_1}{\omega_2 - a_2} = \frac{\omega_2 - b_3}{\omega_2 - b_1} = \frac{b_3 - a_1}{b_1 - a_2}; \quad (6) \qquad \frac{\omega_2 - a_2}{\omega_2 - a_3} = \frac{\omega_2 - b_1}{\omega_2 - b_2} = \frac{b_1 - a_2}{b_2 - a_3}; \quad (7)$$

$$\frac{\omega_2 - a_3}{\omega_2 - a_1} = \frac{\omega_2 - b_2}{\omega_2 - b_3} = \frac{b_2 - a_3}{b_3 - a_1}; \quad (8) \qquad \frac{\omega_3 - a_1}{\omega_3 - a_2} = \frac{\omega_3 - b_2}{\omega_3 - b_3} = \frac{b_2 - a_1}{b_3 - a_2}; \quad (9)$$

$$\frac{\omega_3 - a_2}{\omega_3 - a_3} = \frac{\omega_3 - b_3}{\omega_3 - b_1} = \frac{b_3 - a_2}{b_1 - a_3}; \quad (10) \qquad \frac{\omega_3 - a_3}{\omega_3 - a_1} = \frac{\omega_3 - b_1}{\omega_3 - b_2} = \frac{b_1 - a_3}{b_2 - a_1}. \quad (11)$$

Dacă presupunem că $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = \Omega$; atunci, dacă ω este afixul lui Ω, se obţine

$$\frac{\omega - a_1}{\omega - a_2} \overset{(6)}{=} \frac{\omega - b_3}{\omega - b_1} \overset{(10)}{=} \frac{\omega - a_2}{\omega - a_3} \overset{(4)}{=} \frac{\omega - b_2}{\omega - b_3} \overset{(8)}{=} \frac{\omega - a_3}{\omega - a_1},$$

deci, $\dfrac{\omega - a_1}{\omega - a_2} = \dfrac{\omega_1 - a_2}{\omega_1 - a_3} = \dfrac{\omega - a_3}{\omega - a_1}$ ceea ce, trecând la argumente şi ţinând cont că suma lor este 360°, conduce la concluzia

$$\arg\left(\frac{\omega - a_1}{\omega - a_2}\right) = \arg\left(\frac{\omega - a_2}{\omega - a_3}\right) = \arg\left(\frac{\omega - a_3}{\omega - a_1}\right) = 120^\circ,$$

de unde deducem că Ω este centrul triunghiului $A_1A_2A_3$; la fel demonstrăm că Ω este şi centrul triunghiului $B_1B_2B_3$ şi cu aceasta demonstraţia este încheiată.

Remarcăm în final faptul că două triunghiuri echilaterale pot fi şi invers asemenea în trei ordini distincte, dar transformarea care le aplică unul pe celălalt este o compunere dintre o omotetie şi o simetrie, ambele având acelaşi centru. Asupra acestui subiect vom reveni.

Bibliografie

1. **D. Andrica, N. Bişboacă** - *Numere complexe*, Ed. Millenium, Alba Iulia, 2001.
2. **C. Ionescu - Bujor** - *Elemente de transformări geometrice*, Bibl. Soc. St. Mat. R.S.R., Ed. Tehnică, Bucureşti, 1958.
3. **C. Cocea** - *200 de probleme din geometria triunghiului echilateral*, Ed."Gh. Asachi", Iaşi, 1992.
4. **C. Cocea** - *Noi probleme de geometrie*, Ed."Spiru Haret", Iaşi, 1997.
5. **N. Mihăileanu** - *Utilizarea numerelor complexe în geometrie*, Bibl. Soc. St. Mat. R.S.R., Ed.Tehnică, Bucureşti, 1968.
6. **D. Smaranda, N. Soare** - *Transformări geometrice*, Bibl. profesorului de matematică, Ed. Acad. R.S.R., 1988.

ERATĂ

În legătură cu articolul *"Două funcţii cu aceeaşi derivată pe un interval nu diferă neapărat printr-o constantă"*, apărut în nr. 1/2005 al revistei noastre, pp. 31-33, redacţia face următoarele precizări:

1. Articolul se referă la funcţii cu derivate egale în orice punct al unui interval.

2. Enunţul de teoremă citat în primele rânduri nu este cel prezent în *"Manualul de matematică, cl. a XI-a"*, ed. 2001, al prof. M. Ganga, aşa cum se menţionase în articol.

Redacţia regretă această eroare şi cere scuze profesorului Mircea Ganga.