Principiul lui Cousin – principiu fundamental al analizei matematice

Florin POPOVICI[1]

Foarte adesea ca principiu fundamental în construcţia mulţimii numerelor reale, deci şi a analizei matematice, este luat *principiul existenţei marginii superioare*. Sunt cunoscute şi alte modalităţi de definire a mulţimii $\mathbb{R}$. Scopul propus este de a informa cititorul asupra unui principiu, *principiul lui Cousin*, care poate înlocui cu succes pe cel menţionat mai sus. Mai precis, în rândurile ce urmează ne propunem să stabilim echivalenţa dintre principiul lui Cousin şi cel al existenţei marginii superioare şi să demonstrăm un număr de rezultate clasice ale analizei direct pe baza acestuia. Menţionăm că principiul lui Cousin joacă un rol important în cadrul teoriei *integralei Henstock - Kurzweil* (sau *integralei Riemann generalizate*).

Fie $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset [a,b]$ o mulţime de puncte astfel încât $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$; familia de intervale juxtapuse $d := \left\{[x_{i-1}, x_i] \mid i = \overline{1,n}\right\}$ se numeşte *diviziune* a intervalului $[a,b]$. Fie $x_i', x_i'' \in [a,b]$, $i = \overline{1,n}$, astfel încât $x_1' < x_1'' \leq x_2' < x_2'' \leq \cdots \leq x_n' < x_n''$; familia de intervale $d := \left\{[x_{i-1}, x_i] \mid i = \overline{1,n}\right\}$ se numeşte *diviziune parţială* a intervalului $[a,b]$. Fie $d := \left\{[x_i', x_i''] \mid i = \overline{1,n}\right\}$ o diviziune parţială a intervalului $[a,b]$ şi punctele $z_i \in [x_i', x_i'']$, $i = \overline{1,n}$; familia de perechi ordonate $\left\{([x_i', x_i''], z_i) \mid i = \overline{1,n}\right\}$ se numeşte *diviziune parţială indexată* a intervalului $[a,b]$ şi se notează $\left(([x_i', x_i''], z_i) \mid i = \overline{1,n}\right)$.

Definiţie. *Fie $\delta : [a,b] \to (0,\infty)$ o funcţie dată. O diviziune parţială indexată $\left(([x_i', x_i''], z_i) \mid i = \overline{1,n}\right)$ se numeşte δ-fină dacă $[x_i', x_i''] \subset (z_i - \delta(z_i), z_i + \delta(z_i))$, $i = \overline{1,n}$.*

Echivalenţa celor două principii este dată de următoarea

Teoremă. *Fie K un corp comutativ total ordonat. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1° (principiul existenţei marginii superioare) *pentru orice mulţime $A \subset K$ nevidă şi majorată există* $\sup A$*;*

2° (principiul lui Cousin) *pentru orice $a, b \in K$, $a < b$, şi pentru orice funcţie $\delta : [a,b] \to (0,\infty)$ există o diviziune indexată δ-fină a intervalului $[a,b]$.*

Demonstraţie. $1° \Rightarrow 2°$. Fie $\mathcal{C}$ familia diviziunilor parţiale ale intervalului $[a,b]$, formate din intervale juxtapuse, iniţializate în punctul a, adică

$$\mathcal{C} = \left\{\left(([x_{i-1}, x_i], z_i) \mid i = \overline{1,n}\right) \mid x_0 = a; [x_{i-1}, x_i] \subset (z_i - \delta(z_i), z_i + \delta(z_i)), i = \overline{1,n}\right\}.$$

Pentru orice $x_1 \in (a, a + \delta(a)) \cap [a,b]$ avem $([a, x_1], a) \in \mathcal{C}$, deci $\mathcal{C} \neq \emptyset$. Fie mulţimea

$$C = \left\{x_n \mid \left(([x_{i-1}, x_i], z_i) \mid i = \overline{1,n}\right) \in \mathcal{C}\right\}.$$

Evident, $C \neq \emptyset$ şi $C \subset (a,b]$. Fie $c = \sup C$. Arătăm că $c = b$. Presupunem prin reducere la absurd că $c < b$. Rezultă că există $\left(([x_{i-1}, x_i], z_i) \mid i = \overline{1,n}\right) \in \mathcal{C}$, astfel încât $x_n \in (c - \delta(c), c]$. Fie $x_{n+1} \in (c, c + \delta(c)) \cap (c, b]$ şi fie $z_{n+1} = c$. Rezultă că $\left(([x_{i-1}, x_i], z_i) \mid i = \overline{1,n+1}\right) \in \mathcal{C}$ şi $x_{n+1} > c$, absurd. Deci $c = b$.

[1] Profesor, Liceul Teoretic "N. Titulescu", Braşov

Fie $\left(\left(\left[x_{i-1},x_i\right],z_i\right) \mid i=\overline{1,n}\right) \in \mathcal{C}$, cu $x_n \in \left(b-\delta\left(b\right), b\right]$. Dacă $x_n = b$, atunci $\left(\left(\left[x_{i-1},x_i\right],z_i\right) \mid i=\overline{1,n}\right)$ este o diviziune indexată δ-fină a intervalului $[a,b]$. Dacă $x_n < b$, atunci fie $x_{n+1} = b$ şi $z_{n+1} = b$. Rezultă că $\left(\left(\left[x_{i-1},x_i\right],z_i\right) \mid i=\overline{1,n+1}\right)$ este o diviziune indexată δ-fină a intervalului $[a,b]$.

$2^\circ \Rightarrow 1^\circ$. Fie $a \in A$. Conform ipotezei există $b \in K$, astfel încât $x < b$, $\forall x \in A$. Fie mulţimea $B = \{z \in K \mid z \leq b; x \leq z, \forall x \in A\}$. Evident, $b \in B$ şi $B \subset [a,b]$. Presupunem prin reducere la absurd că nu există $\sup A$. Rezultă că nu există $\min B$.

Fie $z \in B$. Urmează că există $z' \in B$, cu $z' < z$. Fie $\delta\left(z\right) = z - z'$. Avem $z' = z - \delta\left(z\right) < z < z + \delta\left(z\right)$. Fie $z \in [a,b] \setminus B$ $(\neq \emptyset)$. Urmează că există $z'' \in A$, cu $z < z''$. Fie $\delta\left(z\right) = z'' - z$. Avem $z - \delta\left(z\right) < z < z + \delta\left(z\right) = z''$.

Conform ipotezei, există o diviziune indexată δ-fină $\left(\left(\left[x_{i-1},x_i\right],z_i\right) \mid i=\overline{1,n}\right)$ a intervalului $[a,b]$. Ţinând seama de modul cum a fost definită funcţia δ, $z_1 \in [a,b] \setminus B$ şi $z_n \in B$ (deci $n \geq 2$). Fie $j = \min\{i \in \{1,\ldots,n\} \mid z_i \in B\}$. Rezultă că $z_j \in B$ şi $z_{j-1} \in [a,b] \setminus B$. Urmează că $x_{j-1} \in B$ şi $x_{j-1} \in [a,b] \setminus B$, absurd. Rezultă că presupunerea că nu există $\sup A$ este falsă.

Odată demonstrată echivalenţa acestor principii, putem afirma că orice teoremă de analiză poate fi dovedită direct cu principiul lui Cousin. În continuare, vom exemplifica această afirmaţie pe câteva teoreme clasice ale analizei; cititorul poate spori lista acestora.

Teorema 1 (Cantor). *Fie un şir de intervale* $\left(\left[a_n,b_n\right]\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $[a_n,b_n] \subset \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. *Dacă* $[a_{n+1},b_{n+1}] \subset [a_n,b_n]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, *atunci* $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n] \neq \emptyset$. *În plus, dacă* $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, *atunci există* $x_0 \in \mathbb{R}$, *astfel încât* $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n] = \{x_0\}$.

Demonstraţie. Dacă $a_1 = b_1$, atunci $[a_n,b_n] = \{a_1\}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Rezultă că $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n] = \{a_1\} \neq \emptyset$.

Considerăm cazul în care $a_1 < b_1$. Presupunem prin reducere la absurd că $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n] = \emptyset$. Pentru orice $z \in [a_1,b_1]$ există şi alegem $n\left(z\right) \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $z \notin \left[a_{n(z)},b_{n(z)}\right]$. Fie $\delta : [a_1,b_1] \to (0,\infty)$ funcţia definită prin

$$\delta\left(z\right) = \begin{cases} a_{n(z)} - z, \text{ dacă } z < a_{n(z)} \\ z - b_{n(z)}, \text{ dacă } z > b_{n(z)} \end{cases}.$$

Conform principiului lui Cousin, există o diviziune indexată δ-fină $(([x_{i-1},x_i],z_i) \mid i = \overline{1,k})$ a intervalului $[a_1,b_1]$. Fie $N = \max\left\{n(z_i) \,|\, i = \overline{1,k}\right\}$. Rezultă că $[a_N,b_N] \cap [x_{i-1},x_i] = \emptyset$, $i = \overline{1,k}$. Urmează că $[a_N,b_N] \cap [a_1,b_1] = \emptyset$, deci $[a_N,b_N] = \emptyset$, absurd. Rezultă că presupunerea că $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n] = \emptyset$ este falsă.

Teorema 2 (Weierstrass). *Dacă* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *este o funcţie continuă pe* $[a,b]$, *atunci funcţia* f *este mărginită şi îşi atinge marginile.*

Demonstraţie. Deoarece funcţia f este continuă pe $[a,b]$, pentru orice $z \in [a,b]$ există $\delta\left(z\right) \in (0,\infty)$, astfel încât

$$\forall x \in \left(z - \delta\left(z\right), z + \delta\left(z\right)\right) \cap [a,b] \Rightarrow \left|f\left(x\right) - f\left(z\right)\right| < 1.$$

Urmează că

$$\forall x \in (z - \delta(z), z + \delta(z)) \cap [a,b] \Rightarrow |f(x)| < 1 + |f(z)|.$$

Conform principiului lui Cousin, există o diviziune indexată δ-fină $(([x_{i-1}, x_i], z_i) \mid i = \overline{1,n})$ a intervalului $[a,b]$. Rezultă că

$$|f(x)| < 1 + \max\left\{|f(z_i)| \mid i = \overline{1,n}\right\}, \quad \forall x \in [a,b],$$

deci funcţia f este mărginită.

Fie $M = \sup\{f(z) \mid z \in [a,b]\}$. Presupunem prin reducere la absurd că $f(z) \neq M$, $\forall z \in [a,b]$. Urmează că $f(z) < M$, $\forall z \in [a,b]$. Deoarece funcţia f este continuă pe $[a,b]$, pentru orice $z \in [a,b]$ există $\delta(z) \in (0,\infty)$ astfel încât

$$\forall x \in (z - \delta(z), z + \delta(z)) \cap [a,b] \Rightarrow |f(x) - f(z)| < \frac{1}{2}(M - f(z)).$$

Urmează că

$$\forall x \in (z - \delta(z), z + \delta(z)) \cap [a,b] \Rightarrow f(x) < \frac{1}{2}(M - f(z)) + f(z) = \frac{1}{2}(M + f(z)).$$

Conform principiului lui Cousin, există o diviziune indexată δ-fină $(([x_{i-1}, x_i], z_i) \mid i = \overline{1,n})$ a intervalului $[a,b]$. Rezultă că

$$f(x) < \frac{1}{2}\left(M + \max\left\{f(z_i) \mid i = \overline{1,n}\right\}\right) < M, \quad \forall x \in [a,b],$$

absurd. Deci există $z' \in [a,b]$ astfel încât $f(z') = M = \sup\{f(z) \mid z \in [a,b]\}$. În mod analog se arată că există $z'' \in [a,b]$ astfel încât $f(z'') = \inf\{f(z) \mid z \in [a,b]\}$.

Teorema 3. *Dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă pe $[a,b]$ astfel încât $f(x) \neq 0$, $\forall x \in [a,b]$, atunci $f(x) > 0$, $\forall x \in [a,b]$, sau $f(x) < 0$, $\forall x \in [a,b]$.*

Demonstraţie. Deoarece funcţia f este continuă pe $[a,b]$, pentru orice $z \in [a,b]$ există $\delta(z) \in (0,\infty)$, astfel încât

$$\forall x \in (z - \delta(z), z + \delta(z)) \cap [a,b] \Rightarrow |f(x) - f(z)| < \frac{1}{2}|f(z)|.$$

Urmează că pentru orice $x \in (z - \delta(z), z + \delta(z)) \cap [a,b]$ avem

$$f(z) > 0 \Rightarrow f(x) = f(x) - f(z) + f(z) > -\frac{1}{2}f(z) + f(z) = \frac{1}{2}f(z) > 0 \quad \text{şi}$$

$$f(z) < 0 \Rightarrow f(x) = f(x) - f(z) + f(z) < -\frac{1}{2}f(z) + f(z) = \frac{1}{2}f(z) < 0.$$

Conform principiului lui Cousin, există o diviziune indexată δ-fină $(([x_{i-1}x_i], z_i) \mid i = \overline{1,n})$ a intervalului $[a,b]$. Pe fiecare interval $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1,n}$, funcţia f are semn constant. Urmează că avem

$$f(a) > 0 \Rightarrow f(x) > 0, \quad \forall x \in [a,b] \quad \text{şi}$$
$$f(a) < 0 \Rightarrow f(x) < 0, \quad \forall x \in [a,b].$$

Observaţie. Teorema valorilor intermediare este o consecinţă imediată a Teoremei 3.

Definiţie. *O mulţime $A \subseteq \mathbb{R}$ se numeşte neglijabilă Lebesgue dacă pentru orice $\varepsilon \in (0,\infty)$ există un şir de intervale $\left((a_j, b_j)\right)_{j \in \mathbb{N}^*}$, astfel încât $A \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty}(a_j, b_j)$ şi $\sum\limits_{j=1}^{\infty}(b_j - a_j) < \varepsilon$.*

Teorema 4 (Criteriul lui Lebesgue de integrabilitate Riemann). *Dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie mărginită şi există o mulţime neglijabilă Lebesgue $A \subset [a,b]$, astfel încât funcţia f este continuă pe $[a,b] \setminus A$, atunci funcţia f este integrabilă Riemann.*

Demonstraţie. Fie $\varepsilon \in (0,\infty)$. Fie $z \in [a,b] \setminus A$. Deoarece funcţia f este continuă în punctul z, există $\delta(z) \in (0,\infty)$, astfel încât

$$\forall x \in (z - \delta(z), z + \delta(z)) \cap [a,b] \Rightarrow |f(x) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$$

Urmează că

$$\forall x', x'' \in (z - \delta(z), z + \delta(z)) \cap [a,b] \Rightarrow |f(x'') - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Conform ipotezei, există $M \in (0,\infty)$, astfel încât $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in [a,b]$. Deoarece mulţimea A este neglijabilă Lebesgue, există un şir de intervale $\left((a_j, b_j)\right)_{j \in \mathbb{N}^*}$ astfel încât $A \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j)$ şi $\sum\limits_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j) < \dfrac{\varepsilon}{4M}$. Pentru orice $z \in A$ alegem $j(z) \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $z \in \left(a_{j(z)}, b_{j(z)}\right)$. Alegem $\delta(z) \in (0,\infty)$ astfel încât $(z - \delta(z), z + \delta(z)) \subset \left(a_{j(z)}, b_{j(z)}\right)$.

Corespunzător funcţiei $\delta : [a,b] \to (0,\infty)$, conform principiului lui Cousin, există o diviziune indexată δ-fină $\left(([x_{i-1}, x_i], z_i) \mid i = \overline{1,n}\right)$ a intervalului $[a,b]$. Pentru orice $z_i', z_i'' \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1,n}$, avem

$$\sum_{i=1}^{n} f(z_i'')(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(z_i')(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{\substack{i=1 \\ z_i \in A}}^{n} \left(f(z_i'') - f(z_i')\right)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{\substack{i=1 \\ z_i \notin A}}^{n} \left(f(z_i'') - f(z_i')\right)(x_i - x_{i-1}) <$$

$$< 2M \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \varepsilon,$$

deci

$$\sum_{i=1}^{n} f(z_i'')(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(z_i')(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon.$$

Rezultă că $S_d(f) - s_d(f) < \varepsilon$, unde $s_d(f)$ şi $S_d(f)$ sunt sumele integrale Darboux asociate funcţiei f şi diviziunii $d = \left([x_{i-1}, x_i] \mid i = \overline{1,n}\right)$. Conform criteriului lui Darboux ([**4**], Teorema 9.1.8) rezultă că funcţia f este integrabilă Riemann.

Bibliografie

1. **P. Cousin** - *Sur les fonctions de n variables complexes*, Acta Math., 19 (1985), 1-62.
2. **M. Megan** - *Analiză matematică. Analiză pe dreapta reală*, vol. II, Editura Mirton, Timişoara, 1999.
3. **C. P. Niculescu** - *Analiză matematică pe dreaptă reală. O abordare contemporană*, Editura Universitaria, Craiova, 2002.
4. **Gh. Sireţchi** - *Calcul diferenţial şi integral*, vol. I, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985.