Asupra unor inegalităţi în tetraedru

Marius OLTEANU[1]

În *Gazeta Matematică* – revistă de cultură matematică pentru tineret – nr. 10/2004 a fost publicat articolul [**1**].

Scopul prezentei Note este acela de a extinde şi generaliza unele dintre rezultatele prezentate în acest articol, precum şi a unor inegalităţi din [**2**].

Fie $[ABCD]$ un tetraedru oarecare. Vom folosi următoarele notaţii: V – volumul tetraedrului, R – raza sferei circumscrise, r – raza sferei înscrise, r_A – raza sferei exînscrise de speţa întâi, care este tangentă la faţa BDC (analog r_B, r_C, r_D), h_A – înălţimea tetraedrului coborâtă din vârful A (analog h_B, h_C, h_D), S_A – aria feţei BCD (analog S_B, S_C, S_D), S – aria totală a tetraedrului, H – ortocentrul tetraedrului ortocentric $[ABCD]$, m_A – mediana tetraedrului dusă din A la faţa BCD (analog m_B, m_C, m_D).

Propoziţia 1. *În orice tetraedru $[ABCD]$ au loc următoarele inegalităţi:*

a) $\dfrac{r_A^m}{h_A^n}+\dfrac{r_B^m}{h_B^n}+\dfrac{r_C^m}{h_C^n}+\dfrac{r_D^m}{h_D^n}\geq 2^{2+m-2n}\cdot r^{m-n}$, $m,n\in\{0\}\cup[1,\infty)$;

b) $\dfrac{m_A}{r_A}+\dfrac{m_B}{r_B}+\dfrac{m_C}{r_C}+\dfrac{m_D}{r_D}\geq 8$;

c) $\dfrac{m_A}{S_Ar_A}+\dfrac{m_B}{S_Br_B}+\dfrac{m_C}{S_Cr_C}+\dfrac{m_D}{S_Dr_D}\geq\dfrac{32}{S}$;

d) $S_A^nr_A^m+S_B^nr_B^m+S_C^nr_C^m+S_D^nr_D^m\geq 2^{2+m-2n}\cdot r^{m-n}\cdot(3V)^n$, $m,n\in\{0\}\cup[1,\infty)$;

e) $\dfrac{m_A}{S_A}+\dfrac{m_B}{S_B}+\dfrac{m_C}{S_C}+\dfrac{m_D}{S_D}\geq 64\,\dfrac{r}{S}$;

f) $\dfrac{m_A^2}{r_A}+\dfrac{m_B^2}{r_B}+\dfrac{m_C^2}{r_C}+\dfrac{m_D^2}{r_D}\geq 32r$;

g) $\dfrac{m_A^2}{r_A^2}+\dfrac{m_B^2}{r_B^2}+\dfrac{m_C^2}{r_C^2}+\dfrac{m_D^2}{r_D^2}\geq 16$.

Demonstraţie. Presupunem că $S_A\geq S_B\geq S_C\geq S_D$. Deoarece $3V=r_A\left(S-2S_A\right)$ (şi analoagele) şi $3V=h_AS_A$ (şi analoagele) rezultă imediat că

$$r_A\geq r_B\geq r_C\geq r_D\quad\text{şi}\quad h_A\leq h_B\leq h_C\leq h_D, \tag{1}$$

deci

$$r_A^m\geq r_B^m\geq r_C^m\geq r_D^m\quad\text{şi}\quad\frac{1}{h_A^n}\geq\frac{1}{h_B^n}\geq\frac{1}{h_C^n}\geq\frac{1}{h_D^n}. \tag{2}$$

a) În baza inegalităţilor (2), se poate aplica *inegalitatea Cebâşev* şi obţine

$$\sum\frac{r_A^m}{h_A^n}\geq\frac{1}{4}\left(\sum r_A^m\right)\left(\sum\frac{1}{h_A^n}\right). \tag{3}$$

Se cunoaşte, de asemenea, inegalitatea

$$\frac{x_1^p+x_2^p+x_3^p+x_4^p}{4}\geq\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right)^p,\quad\forall x_i>0,\ i=\overline{1,4},\ \forall p\in\{0\}\cup[1,\infty) \tag{4}$$

[1] Inginer, S. C. Hidroconstrucţia S. A. Bucureşti, Sucursala "Olt-Superior", Râmnicu Vâlcea

(*inegalitatea lui Jensen* pentru funcţia convexă $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$, $f(x)=x^p$, $p\in\{0\}\cup[1,\infty)$).

Dacă în (4) luăm $p=m$, $x_1=r_A$, $x_2=r_B$, $x_3=r_C$, $x_4=r_D$ şi apoi $p=n$, $x_1=\dfrac{1}{h_A}$, $x_2=\dfrac{1}{h_B}$, $x_3=\dfrac{1}{h_C}$, $x_4=\dfrac{1}{h_D}$, obţinem:

$$\frac{1}{4}\left(\sum r_A^m\right)\geq\left(\frac{\sum r_A}{4}\right)^m,\qquad \sum\frac{1}{h_A^n}\geq 4\left(\frac{\sum\dfrac{1}{h_A}}{4}\right)^n. \tag{5}$$

Dar, $\sum\dfrac{1}{h_A}=\dfrac{1}{r}$ şi $\sum\dfrac{1}{r_A}=\dfrac{2}{r}$. În plus, din inegalitatea mediilor avem $\sum r_A\geq\dfrac{16}{\sum\dfrac{1}{r_A}}=8r$. Ţinând seama de aceste relaţii, rezultă că

$$\frac{1}{4}\left(\sum r_A^m\right)\left(\sum\frac{1}{h_A^n}\right)\geq\left(\frac{8r}{4}\right)^m\cdot 4\cdot\left(\frac{1}{4r}\right)^n=2^{2+m-2n}\cdot r^{m-n}. \tag{6}$$

Din (3) şi (6) rezultă în final inegalitatea dorită.

b) $$\sum\frac{m_A}{r_A}\geq\sum\frac{h_A}{r_A}\geq\frac{1}{4}\left(\sum h_A\right)\left(\sum\frac{1}{r_A}\right)\geq\frac{1}{4}\cdot\frac{16}{\sum\dfrac{1}{h_A}}\cdot\sum\frac{1}{r_A}=8.$$

c) Avem $\sum\dfrac{m_A}{S_Ar_A}\geq\sum\dfrac{h_A}{S_Ar_A}$. Dar $\dfrac{h_A}{S_A}\leq\dfrac{h_B}{S_B}\leq\dfrac{h_C}{S_C}\leq\dfrac{h_D}{S_D}$ şi $\dfrac{1}{r_A}\leq\dfrac{1}{r_B}\leq\dfrac{1}{r_C}\leq$ $\leq\dfrac{1}{r_D}$. Aplicând din nou *inegalitatea Cebâşev*, obţinem

$$\sum\frac{h_A}{S_Ar_A}\geq\frac{1}{4}\left(\sum\frac{h_A}{S_A}\right)\left(\sum\frac{1}{r_A}\right)=\frac{1}{2r}\left(\sum\frac{h_A}{S_A}\right), \tag{7}$$

$$\sum\frac{h_A}{S_A}\geq\frac{1}{4}\left(\sum h_A\right)\left(\sum\frac{1}{S_A}\right). \tag{8}$$

Însă, din *inegalitatea mediilor*, avem

$$\sum h_A\geq\frac{16}{\sum\dfrac{1}{h_A}}=16r\quad\text{şi}\quad\sum\frac{1}{S_A}\geq\frac{16}{\sum S_A}=\frac{16}{S}. \tag{9}$$

Din relaţiile (8) şi (9) se obţine că

$$\sum\frac{h_A}{S_A}\geq\frac{1}{4}\cdot 16r\cdot\frac{16}{S}=\frac{64r}{S}. \tag{10}$$

Din inegalităţile (7) şi (10), obţinem în final $\sum\dfrac{h}{S_Ar_A}\geq\dfrac{1}{2r}\cdot 64\cdot\dfrac{r}{S}=\dfrac{32}{S}$, q.e.d.

d) $S_A=\dfrac{3V}{h_A}$ (şi analoagele) $\Rightarrow\sum S_A^nr_A^m=(3V)^n\left(\sum\dfrac{r_A^m}{h_A^n}\right)\geq 2^{2+m-2n}r^{m-n}(3V)^n$, conform punctului *a*).

e) $\sum\dfrac{m_A}{S_A}\geq\sum\dfrac{h_A}{S_A}\geq 64\,\dfrac{r}{S}$ (conform inegalităţii (10)).

$f)$
$$\sum \frac{m_A^2}{r_A} \geq \sum \frac{h_A^2}{r_A} \geq \frac{1}{4}\Big(\sum h_A^2\Big)\Big(\sum \frac{1}{r_A}\Big) \geq$$
$$\geq \frac{1}{16}\Big(\sum h_A\Big)^2 \frac{2}{r} \geq \frac{1}{8r}\left(\frac{16}{\sum \frac{1}{h_A}}\right)^2 = 32r$$

$g)$
$$\sum \frac{m_A^2}{r_A^2} \geq \sum \frac{h_A^2}{r_A^2} \geq \frac{1}{4}\Big(\sum h_A^2\Big)\Big(\sum \frac{1}{r_A^2}\Big) \geq$$
$$\geq \frac{1}{16}\Big(\sum h_A\Big)^2 \frac{1}{4}\Big(\sum \frac{1}{r_A}\Big)^2 \geq \frac{1}{64}\left(\frac{16}{\sum \frac{1}{h_A}}\right)^2 \frac{4}{r^2} = 16.$$

Observaţii. 1) Inegalitatea $a)$ generalizează inegalitatea 5) din [**1**] precum şi problema 83-$a)$ din [**2**].

2) Inegalitatea $b)$ extinde la un tetraedru oarecare (nu neapărat ortocentric) relaţia 7) din [**1**] şi problema 129-$d)$ din [**2**].

3) La punctele $a)$ - $g)$ egalităţile au loc numai dacă $[ABCD]$ este tetraedru echifacial.

4) Inegalitatea $c)$ extinde la un tetraedru oarecare (nu neapărat ortocentric) inegalitatea 10) din [**1**].

5) Inegalitatea $d)$ generalizează inegalitatea 11) din [**1**] şi problema 83-$b)$ din [**2**].

6) Inegalitatea $e)$ extinde la un tetraedru oarecare (nu neapărat ortocentric) problema 129-$e)$ din [**2**].

Având în vedere cele expuse mai înainte, propunem cititorului interesat să demonstreze că, în orice tetraedru $[ABCD]$ au loc şi inegalităţile:

$g')$ $\dfrac{m_A^2}{h_A} + \dfrac{m_B^2}{h_B} + \dfrac{m_C^2}{h_C} + \dfrac{m_D^2}{h_D} \geq 16r;$

$g'')$ $\dfrac{1}{m_A r_A} + \dfrac{1}{m_B r_B} + \dfrac{1}{m_C r_C} + \dfrac{1}{m_D r_D} \leq \dfrac{1}{2r^2}.$

Propoziţia 2. *În orice tetraedru $[ABCD]$ ortocentric în punctul $H \in \operatorname{int}(ABCD)$ au loc inegalităţile:*

$h)$ $\dfrac{r_A^m}{m_A^n} + \dfrac{r_B^m}{m_B^n} + \dfrac{r_C^m}{m_C^n} + \dfrac{r_D^m}{m_D^n} \geq 2^{2+m-2n} \cdot 3^n \cdot \dfrac{r^m}{R^n},\ m, n \in \{0\} \cup [1, \infty),$

$i)$ $\dfrac{S_A^m}{m_A^n} + \dfrac{S_B^m}{m_B^n} + \dfrac{S_C^m}{m_C^n} + \dfrac{S_D^m}{m_D^n} \geq S^m \cdot \left(\dfrac{3}{R}\right)^n \cdot 4^{1-n-m},\ m, n \in \{0\} \cup [1, \infty),$

$j)$ $\dfrac{r_A^m}{h_A^m m_A} + \dfrac{r_B^m}{h_B^m m_B} + \dfrac{r_C^m}{h_C^m m_C} + \dfrac{r_D^m}{h_D^m m_D} \geq \dfrac{3}{2^m R}.$

Demonstraţie. Presupunem că $S_A \geq S_B \geq S_C \geq S_D$. Atunci
$$m_A \leq m_B \leq m_C \leq m_D, \qquad \frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} + \frac{1}{m_C} + \frac{1}{m_D} \geq \frac{3}{R}. \tag{11}$$
Demonstraţiile afirmaţiilor (11) pot fi găsite în [**2**] pag. 24 şi 32 sau în [**3**].

$h)$ Deoarece $r_A^m \geq r_B^m \geq r_C^m \geq r_D^m$ şi $\dfrac{1}{m_A^n} \geq \dfrac{1}{m_B^n} \geq \dfrac{1}{m_C^n} \geq \dfrac{1}{m_D^n}$, se poate aplica *inegalitatea lui Cebâşev* obţinând

$$\sum \frac{r_A^m}{m_A^n} \geq \frac{1}{4}\Big(\sum r_A^m\Big)\Big(\sum \frac{1}{m_A^n}\Big) \geq$$

$$\geq \left(\frac{\sum r_A}{4}\right)^m \cdot 4 \cdot \left(\sum \frac{1}{m_A}\cdot\frac{1}{4}\right)^n \geq \left(\frac{8r}{4}\right)^m \cdot 4 \cdot \left(\frac{3}{4R}\right)^n = 2^{2+m-2n}\cdot 3^n \cdot \frac{r^m}{R^n}$$

(s-a aplicat şi *inegalitatea lui Jensen*).

i) $$\sum \frac{S_A^m}{m_A^n} \geq \frac{1}{4}\left(\sum S_A^m\right)\left(\sum \frac{1}{m_A^n}\right) \geq \left(\frac{\sum S_A}{4}\right)^m \cdot 4 \cdot \left(\frac{\sum \frac{1}{m_A}}{4}\right)^n \geq$$

$$\geq 4\,\frac{S^m}{4^m}\left(\frac{3}{4R}\right)^n = 4^{1-m-n}\frac{3^n}{R^n}S^m.$$

j) $\dfrac{r_A}{h_A} = \dfrac{S_A}{S-2S_A} \geq \dfrac{S_B}{S-2S_B} = \dfrac{r_B}{h_B}$, de unde $\dfrac{r_A}{h_A} \geq \dfrac{r_B}{h_B}$. Analog se arată că $\dfrac{r_B}{h_B} \geq \dfrac{r_C}{h_C} \geq \dfrac{r_D}{h_D}$; deci $\dfrac{r_A}{h_A} \geq \dfrac{r_B}{h_B} \geq \dfrac{r_C}{h_C} \geq \dfrac{r_D}{h_D}$ şi $\dfrac{r_A^m}{h_A^m} \geq \dfrac{r_B^m}{h_B^m} \geq \dfrac{r_C^m}{h_C^m} \geq \dfrac{r_D^m}{h_D^m}$. Cum avem şi $\dfrac{1}{m_A} \geq \dfrac{1}{m_B} \geq \dfrac{1}{m_C} \geq \dfrac{1}{m_D}$, aplicând *inegalitatea lui Cebâşev* se obţine

$$\sum \frac{r_A^m}{h_A^m m_A} \geq \frac{1}{4}\left(\sum \frac{r_A^m}{h_A^m}\right)\left(\sum \frac{1}{m_A}\right) \geq \frac{1}{4}\cdot 2^{2-m}\cdot\frac{3}{R} = \frac{3}{2^m R}$$

(s-a utilizat şi inegalitatea *a*) pentru cazul $m = n$).

Observaţii. 1) Inegalităţile *h*) şi *i*) generalizează problemele 129-*a*) şi 129-*b*) din [**2**].

2) Inegalităţile *b*), *e*), *f*), *g*) şi *g'*) constituie fondul problemei PP.5174 din [**4**].

3) Inegalitatea *j*) generalizează inegalitatea 8) din [**1**].

4) Pentru punctele *h*), *i*), *j*) egalităţile au loc numai dacă $[ABCD]$ este regulat.

În final menţionăm faptul că inegalităţile 5), 7), 11) din [**1**] şi modul de obţinere a inegalităţilor de tipul celor prezentate în [**1**], pot fi găsite şi în [**5**], [**6**].

Bibliografie

1. **R. Bairac, I. Popov** - *Unele proprietăţi pentru sferele exînscrise ale tetraedrului*, G.M. 10/2004, 369-373.
2. **M. Olteanu** - *Inegalităţi în tetraedru*, Editura Universitară Conspress, Bucureşti, 2003.
3. **M. Olteanu** - *Obţinerea unor inegalităţi într-un tetraedru cu ajutorul inegalităţilor de tip Cebâşev şi Jensen (I)*, revista Panmatematica, Rm. Vâlcea, 1994, nr.1.
4. **M. Olteanu** - *PP.5174,* Octogon Mathematical Magazine, Braşov (Romania), vol. 12 (2004), nr. 1, p. 401.
5. **M. Olteanu** - *Obţinerea unor inegalităţi remarcabile într-un tetraedru cu ajutorul inegalităţilor de tip Cebâşev şi Jensen*, (depusă la Gazeta Matematică, 1993).
6. **M. Olteanu** - *Obţinerea unor inegalităţi într-un tetraedru cu ajutorul inegalităţilor de tip Cebâşev şi Jensen (II)*, (depusă la Panmatematica, Rm. Vâlcea).