O problemă de olimpiadă şi ... câteva norme polinomiale

Gabriel DOSPINESCU[1]

O interesantă problemă dată la faza finală a olimpiadei japoneze în anul 1994 cerea

Să se demonstreze că există o constantă absolută $c > 0$ cu proprietatea că pentru orice numere reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$ şi orice număr n are loc

$$\max_{x\in[0,2]} \prod_{i=1}^{n} |x - a_i| \le c^n \max_{x\in[0,1]} \prod_{i=1}^{n} |x - a_i| .$$

Se poate arăta fără foarte mare dificultate, cu ajutorul interpolării, că $c = 12$ este o valoare admisibilă. **Alexandru Lupaş** a demonstrat că $5 + 2\sqrt{6}$ este de asemenea o valoare admisibilă. Astfel că problema determinării celei mai mici constante admisibile se impune.

În cele ce urmează vom demonstra că $3+2\sqrt{2}$ este cea mai bună constantă şi vom generaliza problema pentru un polinom arbitrar cu coeficienţi complecşi. În afară de rezultatul lui Alexandru Lupaş nu mai cunoaştem nimic în legătură cu această problemă, aşa că ne cerem scuze dacă doar repetăm demonstraţia altcuiva.

Fie P_n mulţimea polinoamelor cu coeficienţi complecşi, de grad n. Să definim pentru $a \le b$ norma polinomului $f \in \bigcup\limits_{n\ge1} P_n$ (din motive lesne de înţeles, nu ne vor interesa polinoamele constante) ca fiind $\|f\|_{[a,b]} = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Fie T_n polinomul Cebâşev de ordin n. Să demonstrăm următoarea

Propoziţie. *Pentru orice polinom $f \in P_n$ are loc inegalitatea*

$$\|f\|_{[0,2]} \le \frac{1}{2}\left[\left(3+2\sqrt{2}\right)^n + \left(3-2\sqrt{2}\right)^n\right] \|f\|_{[0,1]} . \tag{1}$$

Estimarea este optimală, pentru polinomul $T_n(2x-1)$ obţinându-se egalitate.

Partea simplă a trecut, este timpul să facem nişte mici calcule. Instrumentul de lucru pe care îl vom folosi este interpolarea. Înainte de a trece la demonstraţia propriu-zisă, să dovedim mai întâi

Lema 1. *Dacă $t_k = \cos\dfrac{k\pi}{n}$ pentru $k = \overline{0,n}$, atunci polinomul $P_n(x) = \prod\limits_{k=0}^{n} (x - t_k)$ are expresia*

$$P_n(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{2^n}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n - \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right]. \tag{2}$$

Demonstraţia nu este deloc dificilă. Este suficient să demonstrăm că

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{2^n}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n - \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right]$$

[1] Student, École Normale Supérieure, Paris

este un polinom monic de grad $n+1$ ce se anulează în $t_k = \cos\frac{k\pi}{n}$. Faptul că este un polinom monic de grad $n+1$ rezultă din scrierea $f(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\left[\binom{n}{1} x^{n-1}\left(x^2-1\right)+\ldots\right]$ (ce arată de fapt doar că f este polinom) şi din faptul că $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^{n+1}} = 1$ (ceea ce este evident). Că acest polinom se anulează în $t_k = \cos\frac{k\pi}{n}$ rezultă din formula lui Moivre.

Din Lema 1 vom deduce câteva rezultate care se vor dovedi esenţiale în demersul nostru.

Lema 2. *Au loc identităţile:*

$$\begin{gathered}\prod_{j\neq k}\left(t_k - t_j\right) = \frac{(-1)^k n}{2^{n-1}} \quad \text{pentru} \quad k \neq \overline{0,n},\\ \prod_{j=1}^{n}\left(t_0 - t_j\right) = \frac{n}{2^{n-2}}, \quad \prod_{j=0}^{n-1}\left(t_n - t_j\right) = \frac{(-1)^n n}{2^{n-2}}.\end{gathered} \tag{3}$$

Demonstraţie. Să derivăm relaţia (2). După calcule, ce le lăsăm în seama cititorului, obţinem

$$\begin{aligned}P_n'(x) = {}&\frac{n}{2^n}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right] +\\ &+\frac{x}{2^n\sqrt{x^2-1}}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n - \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right].\end{aligned} \tag{4}$$

Din (4) şi formula lui Moivre obţinem imediat că

$$\prod_{j\neq k}\left(t_k - t_j\right) = P_n'(t_k) = \frac{(-1)^k n}{2^{n-1}}.$$

Tot din (4), dar de această dată calculând $\lim\limits_{x\to\pm1} P_n'(x)$ cu ajutorul regulii lui l'Hospital, obţinem şi celelalte două relaţii din enunţ.

Demonstraţia Propoziţiei. Înainte de toate observăm că putem presupune fără a restrânge generalitatea ca $\|f\|_{[0,1]} = 1$. Dacă arătăm că pentru orice $x \in [1,2]$ are loc $|f(x)| \leq \frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^n + \left(3-2\sqrt{2}\right)^n}{2}$, va rezulta că pentru orice $x \in [0,2]$ avem $|f(x)| \leq \frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^n + \left(3-2\sqrt{2}\right)^n}{2}$ şi de aici obţinem relaţia (1). Să fixăm, deci, $x \in [1,2]$ şi să considerăm numerele $x_k = \frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{k\pi}{n}\right)$, pentru $k = \overline{0,n}$. Folosind *formula de interpolare Lagrange* putem scrie

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\prod_{j\neq k}\frac{x-x_j}{x_k-x_j},$$

de unde

$$|f(x)| \leq \sum_{k=0}^{n}\left|\prod_{j\neq k}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}\right| = \sum_{k=0}^{n}\prod_{j\neq k}\frac{x-x_j}{|x_k-x_j|} \leq \sum_{k=0}^{n}\prod_{j\neq k}\frac{2-x_j}{|x_k-x_j|} = \sum_{k=0}^{n}\prod_{j\neq k}\frac{3-t_j}{|t_k-t_j|}$$

(să nu uităm că $|f(x_j)| \le 1$, $x_j \in [0,1]$, $x \in [1,2]$).

Să observăm că, din Lema 2, ultima sumă se poate rescrie

$$\frac{2^{n-1}}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\prod_{j\neq k}(3-t_j)+\frac{2^{n-2}}{n}\left[\prod_{j=0}^{n-1}(3-t_j)+\prod_{j=1}^{n}(3-t_j)\right]. \tag{5}$$

Folosind Lema 1 şi (4) avem

$$\frac{n}{2^n}\left[\left(3+2\sqrt{2}\right)^n+\left(3-2\sqrt{2}\right)^n\right]+\frac{3}{2^{n+1}\sqrt{2}}\left[\left(3+2\sqrt{2}\right)^n-\left(3-2\sqrt{2}\right)^n\right]=$$

$$=P_n'(3)=\sum_{k=1}^{n-1}\prod_{j\neq k}(3-t_j)+\prod_{j=0}^{n-1}(3-t_j)+\prod_{j=1}^{n}(3-t_j).$$

Rămâne să constatăm că $\prod\limits_{j=0}^{n-1}(3-t_j)+\prod\limits_{j=1}^{n}(3-t_j)=6\prod\limits_{j=1}^{n-1}(3-t_j)$. Însă, întorcându-ne în (2), observăm că

$$\prod_{j=1}^{n-1}(x-t_j)=\frac{1}{2^n\sqrt{x^2-1}}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n-\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right],$$

de unde

$$\prod_{j=1}^{n-1}(3-t_j)=\frac{1}{2^{n+1}\sqrt{2}}\left[\left(3+2\sqrt{2}\right)^n-\left(3-2\sqrt{2}\right)^n\right]. \tag{6}$$

Un mic calcul bazat pe relaţiile (5) şi (6) arată că de fapt

$$\sum_{k=0}^{n}\prod_{j\neq k}\frac{3-t_j}{|t_k-t_j|}=\frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^n+\left(3-2\sqrt{2}\right)^n}{2}.$$

Desigur, ca să terminăm demonstraţia propoziţiei rămâne să arătăm că pentru polinomul $T_n(2x-1)$ chiar avem egalitate. Aceasta este o consecinţă imediată a faptului că

$$T_n(x)=\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n}{2}.$$

Într-adevăr, ultima reprezentare arată tocmai faptul că pentru $x \in [-1,3]$ are loc

$$|T_n(x)| \le \frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^n+\left(3-2\sqrt{2}\right)^n}{2},$$

de unde

$$\|T_n(2x-1)\|_{[0,2]}=\frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^n+\left(3-2\sqrt{2}\right)^n}{2}=$$

$$=\frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^n+\left(3-2\sqrt{2}\right)^n}{2}\|T_n(2x-1)\|_{[0,1]}.$$

Iniţial, ne gândeam să punem punct notei aici, dar ulterior am descoperit că lemele demonstrate mai au câteva aplicaţii deloc de neglijat. Într-adevăr, să vedem pentru început cum decurge *teorema de deviaţie minimală a lui Cebâşev*, din rezultatele de până acum.

Teoremă (Cebâşev). *Pentru orice polinom monic $f \in P_n$ are loc $\|f\|_{[-1,1]} \geq \frac{1}{2^{n-1}}$, estimarea fiind optimală, în sensul că pentru polinomul $\frac{T_n}{2^{n-1}}$ are loc egalitate.*

Demonstraţie. Să presupunem că există $f \in P_n$ astfel încât afirmaţia $\|f\|_{[-1,1]} \geq \frac{1}{2^{n-1}}$ este falsă. Folosind interpolarea Lagrange cu nodurile $t_k = \cos\frac{k\pi}{n}$, $k = \overline{0,n}$, obţinem

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(t_k) \prod_{j \neq k} \frac{x - t_j}{t_k - t_j}. \tag{7}$$

Împărţind cu x şi făcând $x \to \infty$ în (7) (folosind desigur ipoteza că polinomul f este monic) rezultă identitatea

$$1 = \sum_{k=0}^{n} f(t_k) \prod_{j \neq k} \frac{1}{t_k - t_j}, \tag{8}$$

din care, prin utilizarea inegalităţii modulului, rezultă estimarea

$$1 < \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n} \prod_{j \neq k} \frac{1}{|t_k - t_j|}. \tag{9}$$

Nu avem decât să observăm acum că din Lema 2 rezultă identitatea

$$\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n} \prod_{j \neq k} \frac{1}{|t_k - t_j|} = 1,$$

care contrazice relaţia (9). Cititorul poate verifica imediat că polinomul $\frac{T_n}{2^{n-1}}$ este monic, de grad n şi că are norma $\frac{1}{2^{n-1}}$.

Observaţie. Menţionăm că se poate determina cea mai mică valoare a normei unui polinom monic de grad n pe orice interval, aplicând Teorema lui Cebâşev transformatei polinomului prin intermediul unui homeomorfism liniar ce aplică intervalul respectiv în $[-1,1]$.

Desigur, este binecunoscută următoarea problemă, ce apare în fiecare an măcar la una din olimpiadele locale sau interjudeţene:

Dacă $\left|ax^2 + bx + c\right| \leq 1$ pentru $x \in [-1,1]$, atunci $\left|cx^2 + bx + a\right| \leq 2$ pentru $x \in [-1,1]$.

Dacă această problemă este cât se poate de simplă, despre cazul general:

Determinaţi o margine optimală pentru norma polinomului $x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$ pe $[-1,1]$, dacă $f \in P_n$ este un polinom de norma 1 pe $[-1,1]$,

nu putem spune decât contrariul. Acum doi - trei ani figura în *Crux Mathematicorum* ca problema deschisă lansată de **Walther Janous**. Din păcate, nemaiavând acces la numerele noi ale revistei, nu ştim dacă a fost rezolvată sau nu. Cert este că această problemă decurge destul de repede din următoarea afirmaţie mult mai generală (a cărei originalitate o lăsăm în seama cititorului avizat):

Propoziţia 2. *Pentru orice polinom* $f \in P_n$ *are loc* $|f(x)| \le |T_n(x)| \cdot \|f\|_{[-1,1]}$ *pentru orice* $x \in (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

Demonstraţie. Să fixăm $u \in [-1,1]$ nenul şi să scriem iarăşi formula de interpolare Lagrange cu nodurile $t_k = \cos \frac{k\pi}{n}$, adică relaţia (7). Cum (7) este valabilă pentru orice valoare reală a variabilei, obţinem cu ajutorul inegalităţii modulului că

$$\left| f\left(\frac{1}{u}\right)\right| \le \frac{1}{|u^n|} \, \|f\|_{[-1,1]} \sum_{k=0}^{n} \prod_{j \ne k} \frac{1 - ut_j}{|t_k - t_j|}. \tag{10}$$

Dacă scriem acum formula de interpolare pentru polinomul T_n obţinem, ţinând cont că $T_n(t_k) = (-1)^k$ şi de rezultatele din Lema 2, că

$$\left| T_n\left(\frac{1}{u}\right)\right| = \frac{1}{|u^n|} \left| \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \prod_{j \ne k} \frac{1 - ut_j}{t_k - t_j} \right| = \frac{1}{|u^n|} \sum_{k=0}^{n} \prod_{j \ne k} \frac{1 - ut_j}{|t_k - t_j|}. \tag{11}$$

Din (10) şi (11) rezultă desigur că $\left| f\left(\frac{1}{u}\right)\right| \le \|f\|_{[-1,1]} \left| T_n\left(\frac{1}{u}\right)\right|$ pentru orice $u \in [-1,1]$ nenul, ceea ce nu este decât o reformulare a inegalităţii de demonstrat.

Şi acum, două consecinţe interesante ale Propoziţiei 2.

Consecinţa 1. *Teorema lui Cebâşev.*

Într-adevăr, nu avem decât să scriem inegalitatea din Propoziţie sub forma $\left| \frac{f(x)}{x^n} \right| \le \|f\|_{[-1,1]} \left| \frac{T_n(x)}{x^n} \right|$ şi să facem $x \to \infty$. Ţinând cont că T_n are coeficientul dominant 2^{n-1}, rezultă că, dacă $f \in P_n$ este monic, atunci $\|f\|_{[-1,1]} \ge \frac{1}{2^{n-1}}$, adică tocmai teorema de care am vorbit adineauri.

Consecinţa 2. *Problema lui Walther Janous.*

Într-adevăr, dacă presupunem că $f \in P_n$ are norma 1 pe intervalul $[-1,1]$, atunci pentru orice $x \in [-1,1]$ vom avea $\left| x^n f\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le \left| x^n T_n\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le 2^{n-1}$, căci pentru $x \in [-1,1]$ avem $\left| x^n T_n\left(\frac{1}{x}\right)\right| = \frac{1}{2}\left[\left(1 + \sqrt{1-x^2}\right)^n + \left(1 - \sqrt{1-x^2}\right)^n\right] \le 2^{n-1}$ (inegalitatea $(1+a)^n + (1-a)^n \le 2^n$ fiind uşor de demonstrat pentru $0 \le a \le 1$). Rezultă, deci, că norma polinomului $x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$ este majorată de 2^{n-1}, iar această constantă este optimală, căci pentru polinomul Cebâşev de ordinul n marginea este atinsă.

Şi aici se termină vizita în lumea problemelor de olimpiadă şi nu numai…