În legătură cu şirul lui Mihail Ghermănescu[1]

D. M. BĂTINEŢU-GIURGIU[2]

Şirul lui Ghermănescu este şirul $(G_n)_{n\geq 1}$ de termen general

$$G_n = \frac{(n+3)^{n+2}}{(n+2)^{n+1}} - \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^n} \qquad [\mathbf{3}]. \tag{1}$$

Este cunoscut faptul că $\lim\limits_{n\to\infty} G_n = e$; în [**1**] şi [**2**] se găsesc mai multe demonstraţii ale acestui fapt. Ne propunem să dăm o generalizare acestui şir remarcabil.

Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale pozitive cu proprietatea că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a \in \mathbb{R}_+^*$ şi, ca urmare, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$.

Propoziţia 1. *Şirul* $(a_n)_{n\geq 1}$ *are proprietatea că*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n+1]{a_{n+1}} - \sqrt[n]{a_n}\right) = 0. \tag{2}$$

Demonstraţie. Avem

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n+1]{a_{n+1}}}{\sqrt[n]{a_n}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot\frac{1}{\sqrt[n+1]{a_{n+1}}}\right) = a\cdot\frac{1}{a} = 1,$$

deci

$$1 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n+1]{a_{n+1}}}{\sqrt[n]{a_n}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{\sqrt[n+1]{a_{n+1}}-\sqrt[n]{a_n}}{\sqrt[n]{a_n}}\right)^{\frac{\sqrt[n]{a_n}}{\sqrt[n+1]{a_{n+1}}-\sqrt[n]{a_n}}}\right]^{\frac{n\left(\sqrt[n+1]{a_{n+1}}-\sqrt[n]{a_n}\right)}{\sqrt[n]{a_n}}} =$$

$$= e^{\frac{1}{a}\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n+1]{a_{n+1}}-\sqrt[n]{a_n}\right)},$$

de unde rezultă egalitatea (2).

Propoziţia 2. *Dacă* $P\in\mathbb{R}[X]$, *atunci*

$$\lim_{n\to\infty} n\left[P\left(\sqrt[n+1]{a_{n+1}}\right) - P\left(\sqrt[n]{a_n}\right)\right] = 0. \tag{3}$$

Demonstraţie. Fie $P = \sum\limits_{k=0}^{m} b_k X^k$, $b_m \neq 0$ (adică grad $P = m\in\mathbb{N}$). Avem

$$P(x) - P(y) = \sum_{k=1}^{m} b_k\left(x^k - y^k\right) = (x-y)\sum_{k=1}^{m} b_k\left(\sum_{j=0}^{k-1} x^{k-1-j}y^j\right), \quad x,y\in\mathbb{R}.$$

Luând $x = \sqrt[n+1]{a_{n+1}}$ şi $y = \sqrt[n]{a_n}$, obţinem

$$n\left[P\left(\sqrt[n+1]{a_{n+1}}\right) - P\left(\sqrt[n]{a_n}\right)\right] = n\left(\sqrt[n+1]{a_{n+1}} - \sqrt[n]{a_n}\right)\sum_{k=1}^{m} b_k\left(\sum_{j=0}^{k-1}\left(\sqrt[n+1]{a_{n+1}}\right)^{k+j}\left(\sqrt[n]{a_n}\right)^j\right),\ n\in\mathbb{N}^*.$$

---

[1] Matematician român, 1899-1962.

[2] Profesor, Colegiul Naţional "Matei Basarab", Bucureşti

Trecând la limită în această egalitate şi ţinând seama de (2) şi de faptul că

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m} b_k\left(\sum_{j=0}^{k-1}\left(\sqrt[n+1]{a_{n+1}}\right)^{k-1-j}\left(\sqrt[n]{a_n}\right)^{j}\right)=\sum_{k=1}^{m} kb_k a^{k-1}=P'(a),$$

deducem relaţia (3).

Notăm $e_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, $n\geq 1$. Ştim că $\lim\limits_{n\to\infty} e_n=e$ şi că

$$\frac{e}{2n+2}<e-e_n<\frac{e}{2n+1},\quad n\in\mathbb{N}^*\quad [\mathbf{4}].$$

Înmulţind cu n şi trecând la limită, obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} n\,(e-e_n)=\dfrac{e}{2}$. Din aceasta şi din faptul că $e_{n+1}-e_n=(e_{n+1}-e)+(e-e_n)$, rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} n\,(e_{n+1}-e_n)=0. \tag{4}$$

În sfârşit, cu (4) şi urmând un calcul de rutină privind nedeterminările de tipul 1^∞, obţinem şi relaţia

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e_{n+1}}{e_n}\right)^n=1. \tag{5}$$

Fiind dat un şir $(a_n)_{n\geq 1}$ de numere reale strict pozitive cu proprietatea că $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a\in\mathbb{R}_+^*$ şi un polinom $P\in\mathbb{R}_+[X]$, vom numi *şir Ghermănescu generat de şirul* $(a_n)_{n\geq 1}$ *şi polinomul* P şirul $(g_n)_{n\geq 1}$, unde

$$g_n=P\left(\sqrt[n+1]{a_{n+1}}\right)\frac{(n+3)^{n+2}}{(n+2)^{n+1}}-P\left(\sqrt[n]{a_n}\right)\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^n}.$$

Teoremă. *Şirul* $(g_n)_{n\geq 1}$ *generat de şirul* $(a_n)_{n\geq 1}$ *şi polinomul* P *este convergent şi*

$$\lim_{n\to\infty} g_n=P(a)\,e. \tag{6}$$

Să notăm $c_n=\sqrt[n]{a_n}$ şi să scriem g_n sub forma

$$g_n=P(c_{n+1})(n+2)\,e_{n+2}-P(c_n)(n+1)\,e_{n+1},\quad n\geq 1.$$

Prima demonstraţie. Avem, pentru orice $n\geq 1$,

$$g_n=P(c_{n+1})\,e_{n+2}+P(c_{n+1})(n+1)(e_{n+2}-e_{n+1})+n\left[P(c_{n+1})-P(c_n)\right]\frac{n+1}{n}e_{n+1}.$$

La limită, pentru $n\to\infty$, şi ţinând cont de (3) şi (4), obţinem

$$\lim_{n\to\infty} g_n=P(a)\,e+P(a)\cdot 0+0\cdot 1\cdot e=P(a)\,e.$$

Demonstraţia a doua. Cu notaţia $u_n=\dfrac{P(c_{n+1})}{P(c_n)}\cdot\dfrac{n+2}{n+1}\cdot\dfrac{e_{n+2}}{e_{n+1}}$, $n\geq 1$, scriem

$$g_n=P(c_n)(n+1)\,e_{n+1}(u_n-1)=P(c_n)\,e_{n+1}\frac{u_n-1}{\ln u_n}\ln(u_n)^{n+1},\quad n\geq 1.$$

Evident, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$; deci, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n - 1}{\ln u_n} = 1$. Ca urmare,

$$\lim_{n\to\infty} g_n = P(a)\, e \lim_{n\to\infty} \ln (u_n)^{n+1}. \tag{7}$$

Dar, datorită relaţiilor (5) şi (3), avem

$$\lim_{n\to\infty} (u_n)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{P(c_{n+1})}{P(c_n)}\right]^{n+1} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \left(\frac{e_{n+2}}{e_{n+1}}\right)^{n+1} = e \lim_{n\to\infty} \left[\frac{P(c_{n+1})}{P(c_n)}\right]^{n+1} =$$

$$= e \lim_{n\to\infty} \left[1 + \frac{P(c_{n+1}) - P(c_n)}{P(c_n)}\right]^{n+1} = \cdots = e \cdot e^0 = e.$$

Observaţie. Dacă $P = 1$, atunci şirul $(g_n)_{n\geq 1}$ devine şirul lui Ghermănescu, $(G_n)_{n\geq 1}$, şi din (6) obţinem că $\lim\limits_{n\to\infty} G_n = e$.

Bibliografie

1. **D. M. Bătineţu** - *Şiruri*, Editura Albatros, Bucureşti, 1979.
2. **D. M. Bătineţu, M. Bencze, A. Semenescu** - *On Mihail Ghermanescu's Sequence*, Octogon Math. Magazine, 12 (2004), nr. 1, 222-225.
3. **M. Ghermănescu** - *Problema 4600*, Gazeta Matematică, XLI (1935-1936), 216.
4. **G. Pólya, G. Szegö** - *Problems and Theorems in Analysis* (vol I - 1972, vol II - 1976), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

Recreaţii ... matematice

Care dintre egalităţile ce urmează vă plac?

$0 = 2 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 5$
$1 = 2^0 + 0 \cdot 5$
$2 = 2 \cdot 0! + 0 \cdot 5$
$3 = 2! + 0! + 0 \cdot 5$
$4 = (20 + 0) : 5$
$5 = 2 \cdot 0 + 0 + 5$

$6 = 2^0 + 9 + 5$
$7 = 2 + 0 + 0 + 5$
$8 = 2 + 0! \cdot 0! + 5$
$9 = 2! + 0! + 0! + 5$
$10 = (2! + 0 + 0) \cdot 5$

Câte răspunsuri la întrebare sunt posibile? Puteţi alcătui o altă listă de acest fel? (Răspunsul se găseşte la p. 132)
