# O generalizare a teoremelor de bază ale calculului diferenţial

***Florin POPOVICI***[1]

Nota de faţă îşi propune să extindă teoremele de bază ale calculului diferenţial prin impunerea condiţiei de derivabilitate bilaterală în locul condiţiei clasice de derivabilitate. Rezultatele obţinute se exprimă sub forma unor condiţii de apartenenţă, care pot fi, însă, interpretate geometric.

**Teorema 1** (*Teorema lui Fermat generalizată*). *Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcţie dată. Dacă $c\in(a,b)$ este un punct de extrem local al funcţiei $f$ şi aceasta este derivabilă bilateral (la stânga şi la dreapta) în punctul $c$, atunci*

$$0\in\left[\min\left\{f'_-(c),f'_+(c)\right\},\max\left\{f'_-(c),f'_+(c)\right\}\right]. \tag{1}$$

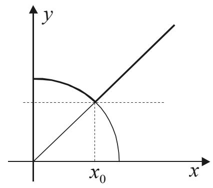
**Demonstraţie.** Fie $c$ punct de maxim local. Aşadar, $\exists\delta>0$ astfel încât avem:

$$x\in(c-\delta,c)\cap[a,b]\Rightarrow f(x)\le f(c)\Rightarrow\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\ge0\Rightarrow f'_-(c)\ge0,$$

$$x\in(c,c+\delta)\cap[a,b]\Rightarrow f(x)\le f(c)\Rightarrow\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\le0\Rightarrow f'_+(c)\le0$$

şi, ca urmare, $0\in\left[f'_+(c),f'_-(c)\right]$, adică are loc (1).

**Exemplu.** Funcţia $f(x)=\max\left\{x,1-x^2\right\}$, $x\ge0$, este derivabilă cu excepţia punctului $x_0=\dfrac{\sqrt5-1}{2}$, pentru care $f'_-(x_0)=1-\sqrt5$ şi $f'_+(x_0)=1$. Relaţia (1) revine la $0\in\left(1-\sqrt5,1\right)$, adică semitangentele la grafic în $M_0(x_0,x_0)$ sunt de părţi diferite faţă de paralela prin acest punct la axa $Ox$.




**Teorema 2** (*Teorema lui Rolle generalizată*). *Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este o funcţie continuă pe $[a,b]$, derivabilă bilateral pe $(a,b)$ şi $f(a)=f(b)$, atunci există un punct $c\in(a,b)$ astfel încât are loc relaţia* (1).

**Demonstraţie.** Conform teoremei lui Weierstrass, funcţia $f$ este mărginită şi îşi atinge marginile, adică $\exists c_1,c_2\in[a,b]$ astfel încât $f(c_1)\le f(x)\le f(c_2)$, $\forall x\in[a,b]$.

Dacă $\{c_1,c_2\}\subset\{a,b\}$, atunci rezultă că $f$ este funcţie constantă şi (1) are loc pentru orice $c\in(a,b)$. Dacă $\{c_1,c_2\}\not\subset\{a,b\}$, fie $c\in\{c_1,c_2\}\setminus\{a,b\}$; conform Teoremei 1 pentru acest punct $c$ are loc (1).

**Teorema 3** (*Teorema lui Lagrange generalizată*). *Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este o funcţie continuă pe $[a,b]$ şi derivabilă bilateral pe $(a,b)$, atunci există un punct $c\in(a,b)$ astfel încât*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\in\left[\min\left\{f'_-(c),f'_+(c)\right\},\max\left\{f'_-(c),f'_+(c)\right\}\right]. \tag{2}$$

**Demonstraţie.** Se aplică Teorema 2 funcţiei auxiliare $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ definite prin $g(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$, $x\in[a,b]$.

**Corolarul 1** (*Teorema lui Lagrange pentru funcţii convexe*). *Fie $f:I\to\mathbb{R}$ ($I$ interval deschis) o funcţie convexă. Atunci, pentru orice puncte $a,b\in I$, $a<b$, există $c\in(a,b)$ astfel încât*

[1] Profesor, Liceul Teoretic "N. Titulescu", Braşov

$$f'_-(c) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'_+(c).$$

**Demonstraţie.** Deoarece $f$ este convexă pe $I$ (deschis), rezultă că $f$ este continuă pe $I$, derivabilă bilateral pe $I$ şi $f'_-(x) \leq f'_+(x)$, $\forall x \in I$. Prin aplicarea Teoremei 3 pe intervalul $[a,b]$, obţinem rezultatul cerut.

**Corolarul 2.** *Fie $f : I \to \mathbb{R}$ ($I$ interval deschis) o funcţie continuă şi derivabilă bilateral pe $I$. Atunci funcţia $f$ este crescătoare pe $I$ dacă şi numai dacă este satisfăcută condiţia*

$$\min\left\{f'_-(x), f'_+(x)\right\} \geq 0, \quad \forall x \in I. \tag{3}$$

**Demonstraţie.** Necesitatea condiţiei este uşor de dovedit. Pentru suficienţă, fie $x_1, x_2 \in I$ cu $x_1 < x_2$. Conform Teoremei 3, aplicată restricţiei funcţiei $f$ la $[x_1, x_2]$,

$$\exists c \in (x_1, x_2) \quad \text{astfel încât} \quad \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geq \min\left\{f'_-(c), f'_+(c)\right\}.$$

De aici şi din (3), deducem că $f(x_1) \leq f(x_2)$; ca urmare, funcţia $f$ este crescătoare.

**Teorema 4** (*Teorema lui Cauchy generalizată*). *Dacă $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sunt două funcţii continue pe $[a,b]$, derivabile bilateral pe $(a,b)$ şi*

$$0 \notin \left[\min\left\{g'_-(x), g'_+(x)\right\}, \max\left\{g'_-(x), g'_+(x)\right\}\right], \quad \forall x \in (a,b), \tag{4}$$

*atunci $g(a) \neq g(b)$ şi există un punct $c \in (a,b)$ astfel încât*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \in \left[\min\left\{\frac{f'_-(c)}{g'_-(c)}, \frac{f'_+(c)}{g'_+(c)}\right\}, \max\left\{\frac{f'_-(c)}{g'_-(c)}, \frac{f'_+(c)}{g'_+(c)}\right\}\right]. \tag{5}$$

**Demonstraţie.** Dacă am avea $g(a) = g(b)$, atunci, conform Teoremei 2, ar exista un punct $c \in (a,b)$ astfel încât $0 \in \left[\min\left\{g'_-(c), g'_+(c)\right\}, \max\left\{g'_-(c), g'_+(c)\right\}\right]$, ceea ce contrazice (4). Deci are loc $g(a) \neq g(b)$.

Considerăm acum funcţia $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ definită prin

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x), \quad x \in [a,b].$$

Observăm că $h$ este continuă pe $[a,b]$, derivabilă bilateral pe $(a,b)$ şi avem $h(a) = \dfrac{f(a)g(b)-f(b)g(a)}{g(b)-g(a)} = h(b)$. Conform Teoremei 2, există $c \in (a,b)$ astfel încât $0 \in \left[\min\left\{h'_-(x), h'_+(x)\right\}, \max\left\{h'_-(x), h'_+(x)\right\}\right]$, adică avem

$$f'_-(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'_-(c) \leq 0 \leq f'_+(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'_+(c) \tag{6}$$

sau

$$f'_+(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'_+(c) \leq 0 \leq f'_-(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'_-(c). \tag{7}$$

Presupunem că are loc (6) (se procedează analog, dacă ar avea loc (7)). Datorită ipotezei (4), putem scrie

$$\min\left\{g'_-(c), g'_+(c)\right\} > 0 \quad (8) \qquad \text{sau} \qquad \max\left\{g'_-(c), g'_+(c)\right\} < 0 \quad (9).$$

Dacă are loc (8), atunci (6) ia forma

$$\frac{f'_-(c)}{g'_-(c)} \leq \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \leq \frac{f'_+(c)}{g'_+(c)},$$

deci (5) este adevărată. Dacă are loc (9), atunci (6) se scrie

$$\frac{f'_+(c)}{g'_+(c)} \leq \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \leq \frac{f'_-(c)}{g'_-(c)},$$

deci (5) este adevărată şi în acest caz. Demonstraţia este completă.