ARTICOLE ŞI NOTE

Câteva noi aplicaţii ale unei idei consacrate

Gabriel DOSPINESCU[1]

Nu credem că exagerăm spunând că 99% din inegalităţile care sunt propuse ca probleme de concurs pot fi demonstrate direct, aplicând alte inegalităţi deja consacrate. Există însă o categorie aparte de probleme foarte greu de rezolvat în acest mod. Aceste probleme au soluţii frumoase, bazate pe raţionamente indirecte, dar extrem de eficiente.

Vom prezenta în continuare ideea comună aflată în spatele tuturor acestor soluţii. Să presupunem că avem de demonstrat o inegalitate de forma $g(x_1)+g(x_2)+\cdots+g(x_n)\geq 1$ în ipoteza că variabilele $x_1,x_2,\ldots,x_n$ verifică o relaţie de tipul $f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)=1$.

Presupunem prin reducere la absurd că $g(x_1)+g(x_2)+\cdots+g(x_n)<1$. Notând $S=g(x_1)+g(x_2)+\cdots+g(x_n)$, obţinem că $S=\dfrac{1}{k}$ pentru un anumit $k>1$. Punem $kg(x_i)=a_i$, $i=\overline{1,n}$, rezolvăm ecuaţiile în x_i şi introducem aceste valori ca funcţii de a_i în relaţia $f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)=1$. Găsim că variabilele a_i, $i=\overline{1,n}$ satisfac de asemenea o relaţie de forma $h(x_1)+h(x_2)+\cdots+h(x_n)=0$ precum şi $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$. Problema se reduce acum la a dovedi că egalitatea $h(x_1)+h(x_2)+\cdots+h(x_n)=0$ este imposibilă, lucru care se realizează deseori demonstrând că $h(x_1)+h(x_2)+\cdots+h(x_n)>0$ (sau <0) pentru orice numere a_1, $a_2,\ldots,a_n$ cu sumă 1.

Credem că noua problemă este adesea mai uşoară decât cea iniţială şi pentru a exemplifica acest lucru vom rezolva câteva probleme de concurs utilizând strategia de mai sus.

Prima dintre ele, *Problema 3, OM China 2003*, este faimoasă datorită dificultăţii sale, fiind de asemenea înrudită cu o altă binecunoscută problemă care va fi discutată în cele ce urmează, *Problema 2, OIM 2001.*

Exemplul 1. *Fie* $x_1,x_2,\ldots,x_n\in(0,\pi/2)$ *astfel ca* $\operatorname{tg}x_1\cdot\operatorname{tg}x_2\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}x_n=2^{n/2}$. *Determinaţi cel mai mic* k_n *pentru care inegalitatea* $\cos x_1+\cos x_2+\cdots+\cos x_n\leq k_n$ *este întotdeauna adevărată.*

Soluţie. Substituind $\operatorname{tg}^2 x_i=2a_i$, problema revine la a determina supremumul expresiei $\dfrac{1}{\sqrt{1+2a_1}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+2a_2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{1+2a_n}}$ pentru $a_1,a_2,\ldots,a_n>0$ şi cu produsul egal cu 1.

Nu vom discuta cazul $n=1$, acesta fiind trivial. Pentru $n=2$, rămâne de găsit valoarea maximă a lui $\dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}$, $x>0$. Studiind ceea ce se întâmplă pentru $x=1$, $x\to\infty$ şi $x\to 0$, deducem că valoarea căutată este $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Pentru a dovedi acest lucru, este suficient să se studieze monotonia funcţiei $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}$,

[1] Student, Facultatea de Matematică şi Informatică, Bucureşti

$x > 0$, cu ajutorul derivatei.

Să studiem ce se întâmplă pentru $n > 2$. Dacă toţi a_i, $\overline{i = 1, n}$, sunt egali cu 1, valoarea expresiei de mai sus este $\frac{n}{\sqrt{3}}$. Acum, dacă încercăm să "apropiem" cât mai mulţi a_i de 0, observăm că putem "apropia" de 0 cel mult $n-1$ dintre ei, caz în care valoarea expresiei va tinde la $n-1$. Deoarece $n - 1 > \frac{n}{\sqrt{3}}$, este clar că va trebui să dovedim că $\frac{1}{\sqrt{1+2a_1}} + \frac{1}{\sqrt{1+2a_2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1+2a_n}} \leq n-1$.

Este uşor de văzut că raţionând ca în problema precedentă ajungem repede într-un impas. Observăm însă că este suficient să demonstrăm inegalitatea de mai sus doar pentru $n = 3$. De ce acest lucru? Dacă $n > 3$ şi $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$, atunci putem alege a_i, a_j, a_k al căror produs este cel puţin 1. Atunci

$$\frac{1}{\sqrt{1+2a_1}} + \frac{1}{\sqrt{1+2a_2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1+2a_n}} < n - 3 + \frac{1}{\sqrt{1+2a_i}} + \frac{1}{\sqrt{1+2a_j}} + \frac{1}{\sqrt{1+2a_k}}.$$

Dar

$$\frac{1}{\sqrt{1+2a_i}} + \frac{1}{\sqrt{1+2a_j}} + \frac{1}{\sqrt{1+2a_k}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+2a_i}} + \frac{1}{\sqrt{1+2a_j}} + \frac{1}{\sqrt{1+2\frac{1}{a_i a_j}}} \leq 2,$$

presupunând că inegalitatea este adevărată pentru $n = 3$, iar din relaţia precedentă rezultă că ea este adevărată şi pentru n oarecare.

Să dovedim deci inegalitatea pentru $n = 3$. Presupunem că ea nu este adevărată pentru o tripletă a_1, a_2, a_3. Atunci $\frac{1}{\sqrt{1+2a_1}} + \frac{1}{\sqrt{1+2a_2}} + \frac{1}{\sqrt{1+2a_3}} = \frac{2}{p}$, cu $p < 1$. Notând $x_i = \frac{p}{2\sqrt{1+2a_i}}$, obţinem că $1 = \prod_{k=1}^{3} \left(\frac{p^2}{8x_k^2} - \frac{1}{2} \right) < \prod_{k=1}^{3} \left(\frac{1}{8x_k^2} - \frac{1}{2} \right)$. Este deci suficient să demonstrăm că pentru orice $0 < x, y, z < \frac{1}{2}$ cu $x + y + z = 1$ avem că $\left(\frac{1}{8x^2} - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{8y^2} - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{8z^2} - \frac{1}{2} \right) \leq 1$, inegalitate echivalentă cu

$$(1-2x)(1-2y)(1-2z)(1+2x)(1+2y)(1+2z) \leq 8^3 x^2 y^2 z^2.$$

O altă schimbare de variabilă este acum necesară. Desigur, aceasta este $1-2x = a$, $1 - 2y = b$, $1 - 2z = c$. Rămâne deci să demonstrăm că, pentru orice $a, b, c > 0$ cu suma 1, avem

$$8(1-a)^2(1-b)^2(1-c)^2 \geq abc(2-a)(2-b)(2-c).$$

Avem însă că

$$8(1-a)^2(1-b)^2(1-c)^2 = 8(b+c)^2(c+a)^2(a+b)^2 \geq 8\left(\frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)\right)^2 =$$

$$= \frac{512}{81}(ab+bc+ca)^2 \geq \frac{512}{27} abc\,(a+b+c) = \frac{512}{27} abc.$$

Este suficient, deci, să demonstrăm că $(2-a)(2-b)(2-c) < \frac{512}{27}$, ceea ce este trivial, deoarece $(2-a)(2-b)(2-c) < 8$, iar problema este acum rezolvată.

A fost menţionată anterior, în trecere, frumoasa *Problemă 2, OIM 2001*, propusă de **Hojoo Lee**. Problema în cauză fiind atât de mult discutată şi popularizată, s-ar putea crede că nu mai este nimic nou de spus despre ea. Totuşi, credem că următoarea demonstraţie a unei generalizări a problemei este nouă.

Exemplul 2. *Demonstraţi că dacă* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *sunt numere reale strict pozitive astfel încât* $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$*, iar* $k > 1$ *este un număr natural, atunci*

$$\frac{1}{\sqrt[k]{1+(n^k-1)\,a_1}}+\frac{1}{\sqrt[k]{1+(n^k-1)\,a_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[k]{1+(n^k-1)\,a_n}}\geq 1.$$

Vasile Cârtoaje

Soluţie. Presupunem că

$$\frac{1}{\sqrt[k]{1+(n^k-1)\,a_1}}+\frac{1}{\sqrt[k]{1+(n^k-1)\,a_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[k]{1+(n^k-1)\,a_n}}=\frac{1}{p},$$

pentru un anumit $p > 1$. Notăm $\dfrac{p}{\sqrt[k]{1+(n^k-1)\,a_i}} = x_i$, $i = \overline{1,n}$ şi obţinem că $\left(n^k-1\right)^n = \prod\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{p^k}{x_i^k}-1\right) > \prod\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{1}{x_i^k}-1\right)$, iar $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$.

Pentru a ajunge la o contradicţie, vom dovedi că $\prod\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{1}{x_i^k}-1\right) \geq \left(n^k-1\right)^n$ pentru orice $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ astfel încât $x_1+x_2+\cdots+x_n = 1$. Pentru demonstrarea acestei inegalităţi, să observăm că

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i^k}-1\right)=\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\left(1+x_i+\cdots+x_i^{k-1}\right)\prod\limits_{i=1}^{n}\left(x_1+\cdots+x_{i-1}+x_{i+1}+\cdots+x_n\right)}{\left(x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n\right)^k} \tag{1}$$

şi, din inegalitatea mediilor,

$$\prod_{i=1}^{n}\left(x_1+x_2+\cdots+x_{i-1}+x_{i+1}+\cdots+x_n\right)\geq (n-1)^n\, x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n. \tag{2}$$

Desigur, pentru minorarea celuilalt produs din formula (1), aplicarea directă a inegalităţii mediilor nu mai este la fel de eficientă. Conform inegalităţii mediilor, avem

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^i}{1+x_j+\cdots+x_j^{k-1}}\geq\frac{n\sqrt[n]{\left(x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n\right)^i}}{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n}\left(1+x_j+\cdots+x_j^{k-1}\right)}},\quad i=\overline{0,k-1}.$$

Sumând inegalităţile de mai sus, obţinem

$$\prod_{j=1}^{n}\left(1+x_j+\cdots+x_j^{k-1}\right)\geq\left(1+G+G^2+\cdots+G^{k-1}\right)^n, \tag{3}$$

unde $G = \sqrt[n]{x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n} \leq \dfrac{1}{n}$. Din (1), (2) şi (3) deducem că

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i^k}-1\right)\geq\frac{(n-1)^n\,G^n\left(1+G+G^2+\cdots+G^{k-1}\right)^n}{G^{nk}},$$

iar pentru a finaliza soluţia problemei este suficient să demonstrăm că $\frac{1+G+G^2+\cdots+G^{k-1}}{G^{k-1}} \geq 1+n+\cdots+n^{k-1}$, ceea ce este trivial, deoarece $G \leq \frac{1}{n}$.

Este acum momentul să discutăm o altă problemă deosebită, propusă la *Concursul anual al Gazetei Matematice* de către **Vasile Cârtoaje**. Soluţia autorului se bazează pe aplicarea succesivă a câtorva identităţi, fiind aproape imposibil de găsit în mod independent. Credem că soluţia ce urmează este mai naturală din acest punct de vedere.

Exemplul 3. *Demonstraţi că pentru orice $a, b, c, d > 0$ astfel ca $a^2+b^2+c^2+d^2 = 1$ este satisfăcută inegalitatea $(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) \geq abcd$.*

Soluţie. Să presupunem că $\frac{(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)}{abcd} = p^4$, cu $p < 1$. Fie $\frac{1-a}{pa} = x$, $\frac{1-b}{pb} = y$, $\frac{1-c}{pc} = z$, $\frac{1-d}{pd} = t$. Atunci $1 = \sum \frac{1}{(1+px)^2} > \sum \frac{1}{(1+x)^2}$, iar $xyzt = 1$. Problema se reduce, deci, la a demonstra că

$$\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{1}{(1+t)^2} \geq 1$$

pentru orice $x, y, z, t > 0$ verificând $xyzt = 1$.

Profitând de faptul că enunţul problemei utilizează 4 numere, vom separa numerele în 2 grupe şi demonstra că

$$\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} \geq \frac{1}{1+xy} \quad \text{şi} \quad \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{1}{(1+t)^2} \geq \frac{1}{1+zt}.$$

Prima inegalitate se reduce la $xy(x-y)^2 + (1-xy)^2 \geq 0$, care este în mod evident adevărată, pentru a doua raţionându-se în mod analog. Prin sumarea celor două inegalităţi şi ţinând seama de faptul că $xyzt = 1$, rezultă concluzia.

În încheierea acestui articol vom discuta alte două probleme deosebite, cărora li se pot da soluţii rapide utilizând ideile de mai sus. Prima dintre ele a fost publicată în revista *"American Mathematical Monthly"*, fiind propusă de către **Vasile Cârtoaje**.

Exemplul 4. *Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ astfel încât $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}$. Demonstraţi că* $\frac{1}{n-1+x_1} + \frac{1}{n-1+x_2} + \cdots + \frac{1}{n-1+x_n} \leq 1.$

Soluţie. Presupunem că $\frac{1}{n-1+x_1} + \frac{1}{n-1+x_2} + \cdots + \frac{1}{n-1+x_n} = \frac{1}{p}$, $p < 1$. Notăm $a_i = \frac{p}{n-1+x_i}$, $i = \overline{1,n}$ şi deducem că $a_i < \frac{1}{n-1}$, $i = \overline{1,n}$, iar $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$. Condiţia din enunţ se transcrie sub forma

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{p}{a_k} - n + 1 \right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{p}{a_k} - n + 1}.$$

Deoarece $p < 1$, putem scrie

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{a_k} - n + 1 \right) > \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{p}{a_k} - n + 1 \right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{p}{a_k} - n + 1} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{1}{a_k} - n + 1}.$$

Rămâne, deci, să demonstrăm că pentru orice $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ cu $a_1+a_2+\cdots+a_n = 1$ are loc inegalitatea $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{a_k} - n + 1\right) \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\frac{1}{a_k} - n + 1}$, care este echivalentă cu $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a_k}{1-(n-1)\,a_k} \geq \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1-(n-1)\,a_k}{a_k}$.

O altă substituţie este acum necesară, anume $1-(n-1)a_k = b_k$, $k = \overline{1,n}$. Se observă că avem de asemenea $b_1 + b_2 + \cdots + b_n = 1$ şi rămâne deci să dovedim că $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1-b_k}{b_k} \geq (n-1)^2 \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{b_k}{1-b_k}$, rezultat care se poate obţine prin sumarea a n inegalităţi de forma $\dfrac{b_k}{1-b_k} = \dfrac{b_k}{\sum_{i\neq k} b_i} \leq \dfrac{1}{(n-1)^2} \sum\limits_{i\neq k} \dfrac{b_k}{b_i}$.

În final vom discuta o altă frumoasă problemă de concurs, propusă la *Barajul de selecţie a lotului României pentru OIM, 1999*, de către **Gheorghe Eckstein**.

Exemplul 5. *Demonstraţi că dacă* $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ *satisfac* $x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$, *atunci* $\dfrac{1}{n-1+x_1} + \dfrac{1}{n-1+x_2} + \cdots + \dfrac{1}{n-1+x_n} \leq 1$.

Soluţie. Ca mai sus, problema se reduce la a demonstra că pentru orice $x_1, x_2, \ldots, x_n < \dfrac{1}{n-1}$ astfel încât $x_1+x_2+\cdots+x_n = 1$ are loc inegalitatea $\prod\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{1}{x_i} - n + 1\right) \leq 1$. Cu substituţia $b_i = 1-(n-1)\,x_i$ problema de demonstrat se reduce la

$$(1-b_1)(1-b_2)\cdot\ldots\cdot(1-b_n) \geq (n-1)^n\, b_1 b_2 \cdot \ldots \cdot b_n.$$

Conform inegalităţii mediilor,

$$\prod_{i=1}^{n}(1-b_i) = \prod_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j\neq i} b_j\Big) \geq \prod_{i=1}^{n}\Big[(n-1)\sqrt[n-1]{\prod_{j\neq i} b_j}\Big] = (n-1)^n\, b_1 b_2 \cdot \ldots \cdot b_n,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

În încheiere, ţin să mulţumesc prof. Marian Tetiva pentru lectura acestui articol şi observaţiile preţioase făcute, care au contribuit la îmbunătăţirea formei finale.

E R R A T A

În articolul *"Combinatorică ... algebrică"* de **Gabriel Dospinescu**, publicat în nr. 2/2003 al revistei, forma corectă a Lemei de la pag. 19 este:

Fie n număr natural prim şi $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$. *Are loc egalitatea*

$$a_0 + a_1\varepsilon + \cdots + a_{n-1}\varepsilon^{n-1} = 0, \quad a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{Q},$$

dacă şi numai dacă $a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1}$.

Diferenţele ce apar ne-au fost semnalate de prof. **Sergiu Romaşcu**, Vaslui; acestea nu afectează cu nimic restul articolului. De această neglijenţă se face vinovată redacţia şi nu autorul articolului.