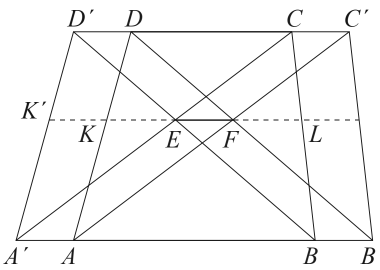
O construcţie geometrică a mediilor (II)

Claudiu - Ştefan POPA[1]

În [**2**] am prezentat o construcţie geometrică a mediilor armonică, geometrică, aritmetică, pătratică şi ponderată a lungimilor bazelor unui trapez, ca segmente cu capetele pe laturile neparalele ale trapezului şi paralele cu bazele lui. Ne propunem în continuare dezvoltarea acestor idei, fapt ce va conduce la o serie de consideraţii cu interesante aplicaţii geometrice.

Propoziţie. *Fie $ABCD$ un trapez cu $AB \parallel CD$ şi punctele A', B', C', D' astfel încât $A \in (A'B)$, $B \in (AB')$, $C \in (C'D)$, $D \in (CD')$, iar $AA' = BB' = CC' = DD'$. Notăm $\{E\} = A'C \cap BD'$, $\{F\} = AC' \cap B'D$, $\{K\} = EF \cap AD$, $\{L\} = EF \cap BC$. În aceste condiţii, $EF \parallel AB$, $EF = AA'$, iar $KE = FL$.*



Demonstraţie. Deoarece $AA' \parallel CC'$ şi $AA' = CC'$, rezultă că $AC'CA'$ este paralelogram, deci $AC' \parallel A'C$, $AC' = A'C$. Analog, $BD' \parallel B'D$, $AD \parallel A'D'$ şi $BC \parallel B'C'$, cu egalităţile de segmente corespunzătoare. Unghiurile $\widehat{D'A'E}$ şi $\widehat{DAF}$ au laturile respectiv paralele şi vor fi congruente; la fel, $\widehat{A'D'E} \equiv \widehat{ADF}$. Avem încă $A'D' = AD$, prin urmare $\triangle A'D'E \equiv \triangle ADF$, deci $A'E = AF$. Însă $AE' \parallel AF$ şi atunci $AFEA'$ este paralelogram. Rezultă că $EF \parallel AA'$ şi $EF = AA'$, primele două afirmaţii ale concluziei.

Fie $\{K'\} = EF \cap A'D'$. Deoarece $A'C$ şi BD' sunt diagonale în trapezul $A'BCD'$, iar $K'L$ este paralelă la baze prin punctul de intersecţie a diagonalelor trapezului, urmează că $EL = EK'$. Însă $KK' = AA' + EF$, deci $EL - EF = EK' - KK'$, adică $FL = KE$, ceea ce încheie demonstraţia.

Observaţie. Concluzia se păstrează, cu demonstraţie asemănătoare, în cazul în care punctele A', B', C', D' se află pe semidreptele $[AB$, $[BA$, $[CD$, respectiv $[DC$.

În cele ce urmează vom folosi notaţiile: $AB = a$, $CD = b$, $AA' = x$. Studiem problema variaţiei lungimii segmentului $[KL]$ funcţie de x; vom gândi lungimea segmentului $[AA']$ ca fiind pozitivă în cazul în care $A \in (A'B)$ şi negativă pentru $A' \in (AB$.

Pentru $x = 0$, avem $KL = \dfrac{2ab}{a+b}$ $(= m_h)$, iar pentru $x = \sqrt{ab}$ $(= m_g)$, avem $KL = m_g$, după cum s-a demonstrat în [**2**]. Desenând figurile pentru câteva valori ale lui $x > 0$, observăm că segmentul $[KL]$ "coboară" pe măsură ce x creşte, fără a "atinge" însă linia mijlocie a trapezului. În momentul în care vom demonstra riguros acest lucru, vom avea o (probabil) nouă demonstraţie pentru inegalitatea mediilor a două numere reale pozitive.

În trapezul $A'BCD'$, segmentul $[K'L]$ are ca lungime media armonică a bazelor $A'B = a + x$ şi $CD' = b + x$, deci $K'L = \dfrac{2(a+x)(b+x)}{a+b+2x}$.

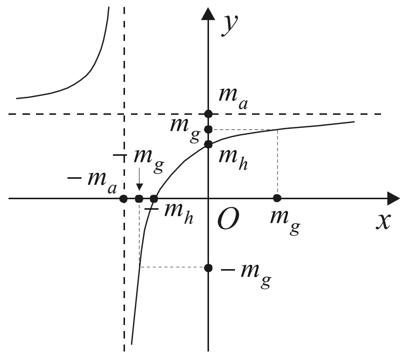
[1] Profesor, Şcoala "Alecu Russo", Iaşi

Atunci, avem

$$KL = K'L - KK' = \frac{2(a+x)(b+x)}{a+b+ax} - x = \frac{x(a+b)+2ab}{2x+(a+b)} = \frac{m_a x + m_g^2}{x+m_a} = m_a \frac{x+m_h}{x+m_a}.$$

Suntem astfel conduşi la studiul funcţiei

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-m_a\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = m_a \cdot \frac{x+m_h}{x+m_a}.$$



Aceasta este o funcţie omografică, strict crescătoare pe $(-\infty, -m_a)$ şi pe $(-m_a, +\infty)$, al cărei grafic este o hiperbolă de asimptote $y = m_a$ şi $x = -m_a$. Prin calcul, stabilim că valorile $x = \pm m_g$ sunt puncte fixe ale funcţiei. Deoarece $f([0,\infty)) = [m_h, m_a)$, iar restricţia lui f la $[0,\infty)$ este strict crescătoare, justificarea afirmaţiilor anterioare este completă.

Consideraţiile precedente conduc la următoarele interpretări geometrice:

1. Faptul că $f(-m_h) = 0$ arată că, dacă $ABCD$ este trapez cu $AB \parallel CD$, $A' \in [AB$, $D' \in [DC$ sunt astfel încât $AA' = DD' = m_h$, iar $\{E\} = A'C \cap BD'$, atunci paralela prin E la bazele trapezului dat trece prin punctul de concurenţă al prelungirilor laturilor neparalele ale acestuia.

2. Faptul că $f(-m_g) = -m_g$ se interpretează geometric astfel: dacă $ABCD$ este un trapez cu $AB \parallel CD$, iar $A' \in [AB$, $D' \in [DC$ sunt astfel încât $AA' = DD' = m_g$, atunci $A'C$, BD' şi AD sunt concurente într-un punct E, iar paralela prin E la baze intersectează BC în F astfel încât EF este media geometrică a lungimilor bazelor.

3. În sfârşit, să observăm că pentru $x = -\dfrac{a+kb}{1+k}$, obţinem $f(x) = \dfrac{a-kb}{1-k}$ (calculul se efectuează cu uşurinţă). Prin urmare, considerând segmentul $[AA']$ de lungime egală cu media ponderată a bazelor cu ponderile 1 şi k, segmentul $[KL]$ va reprezenta media ponderată a bazelor, cu ponderile 1 şi $-k$. Acest fapt ne permite să construim cu rigla şi compasul conjugatul armonic al unui punct; cititorul poate dezvolta singur ideile.

Bibliografie

1. **L. Constantinescu -** *O interpretare geometrică a inegalităţii mediilor,* R.M.T. - 1/1982, 30.
2. **C.-Şt. Popa -** *O construcţie geometrică a unor medii*, Rec. Mat. - 2/2003, 13-14.