Câteva proprietăţi ale medianelor

Temistocle BÎRSAN[1]

1. Ne propunem să indicăm un număr de proprietăţi ale medianelor la nivelul de înţelegere al unui elev bun de gimnaziu. Instrumentele principale de lucru vor fi *teorema lui Thales* şi *teorema lui Menelaus*.

Pentru o exprimare scurtă, vom folosi noţiunile de *puncte izotomice* şi *puncte conjugate armonic*. Fie A, B, X, Y patru puncte coliniare. Punctele X şi Y sunt *izotomice* în raport cu A şi B dacă sunt simetrice faţă de mijlocul segmentului $[AB]$ (evident, X şi Y sunt fie interioare, fie exterioare acestui segment); această condiţie revine la egalitatea $AX = BY$. Punctele X şi Y sunt *conjugate armonic* în raport cu A şi B dacă împart segmentul $[AB]$ în rapoarte egale: $\dfrac{XA}{XB} = \dfrac{YA}{YB}$ (evident, X este interior segmentului şi Y exterior sau invers).

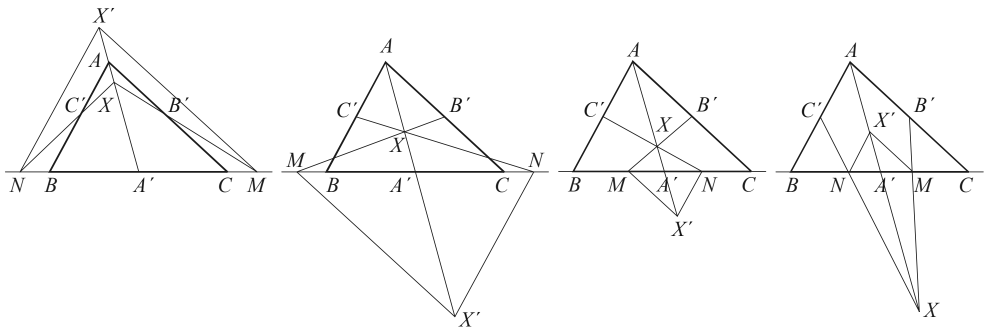
Propoziţia 1. *Fie ABC un triunghi oarecare, A', B', C' mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$, respectiv $[AB]$ şi $M, N \in BC$ două puncte izotomice în raport cu vârfurile B şi C, cu M diferit de mijlocul segmentului $[A'C]$. Atunci, sunt adevărate afirmaţiile:*

1° *dreptele $B'M$ şi $C'N$ se intersectează într-un punct $X \in AA'$;*

2° *paralela prin M la AC şi paralela prin N la AB se intersectează într-un punct $X' \in AA'$;*

3° *punctele X şi X' sunt conjugate armonic în raport cu A şi A'.*

Demonstraţie. Avem patru situaţii distincte ilustrate în figurile de mai jos; demonstraţia este însă aceeaşi.



Deoarece M nu-i mijlocul lui $[A'C]$ rezultă că N nu-i mijlocul lui $[A'B]$ şi, ca urmare, dreptele $B'M$ şi $C'N$ intersectează AA'. Fie $\{X\} = AA' \cap B'M$ şi $\{X_1\} = AA' \cap C'N$. Conform teoremei lui Menelaus, aplicată la $\triangle AA'C$ şi transversala $B'M$ şi la $\triangle AA'B$ şi $C'N$, avem

$$\frac{XA}{XA'} \cdot \frac{MA'}{MC} \cdot \frac{B'C}{B'A} = 1 \quad \text{şi} \quad \frac{X_1A}{X_1A'} \cdot \frac{NA'}{NB} \cdot \frac{C'B}{C'A} = 1,$$

[1] Prof. dr., Catedra de matematică, Univ. Tehnică "Gh. Asachi", Iaşi

de unde $\frac{XA}{XA'} = \frac{MC}{MA'}$ şi $\frac{X_1A}{X_1A'} = \frac{NB}{NA'}$. Punctele M, N fiind izotomice în raport cu B şi C, avem $MA' = NA'$ şi $MC = NB$. Rezultă că $\frac{XA}{XA'} = \frac{X_1A}{X_1A'}$, deci punctul X_1 coincide cu X. Afirmaţia 1° este dovedită.

Fie X', X_1' intersecţiile dreptei AA' cu paralela prin M la AC, respectiv paralela prin N la AB. Conform teoremei lui Thales, au loc relaţiile: $\frac{X'A}{X'A'} = \frac{MC}{MA'}$ şi $\frac{X_1'A}{X_1'A'} = \frac{NB}{NA'}$. Din acestea şi din izotomia punctelor M şi N faţă de B şi C, deducem egalitatea rapoartelor din membrii din stânga. Ca urmare, X_1' coincide cu X', deci 2° este demonstrată.

Mai sus s-a arătat că $\frac{XA}{XA'} = \frac{MC}{MA'}$ şi $\frac{X'A}{X'A'} = \frac{MC}{MA'}$, deci X şi X' împart $[AA']$ în acelaşi raport, adică X, X' sunt conjugate armonic faţă de A, A'. Afirmaţia 3°, deci şi propoziţia, este demonstrată.

Observaţie. Să urmărim deplasarea punctului X pe AA', atunci când M parcurge BC. Notăm cu G centrul de greutate al triunghiului ABC şi cu A^* mijlocul medianei $[AA']$. Dacă M este în C, atunci X coincide cu A. Dacă M se îndepărtează de C, la "dreapta" acestuia, atunci $X \in (AA^*)$. Dacă M se apropie de B, din "stânga" acestuia, atunci $X \in (A^*G)$. Pentru M situat în B, X coincide cu G. Dacă $M \in (BA']$, atunci $X \in (GA']$; punctul M în poziţia A' coincide cu X. Pentru M între A' şi mijlocul segmentului $[A'C]$, X parcurge semidreapta de origine A' ce nu conţine A. În sfârşit, dacă M este între mijlocul lui $[A'C]$ şi C, atunci punctul X este situat pe semidreapta de origine A ce nu conţine A' şi se apropie de vârful A.

O poziţie particulară interesantă a punctului M este semnalată în următorul

Corolar. *Dacă sunt îndeplinite condiţiile din Propoziţia 1 şi în plus* $MC = NB = \frac{a}{2}$, *atunci X este izotomicul punctului G în raport cu A şi A', iar X' este simetricul lui A' faţă de A.*

Demonstraţie. Avem $X \in [AA']$ şi $\frac{XA}{XA'} = \frac{MC}{MA'} = \frac{a/2}{a/2 + a/2} = \frac{1}{2}$, adică $XA' = 2XA$ sau $XA = \frac{1}{3}AA'$. Cum avem şi $GA' = \frac{1}{3}AA'$, rezultă $XA = GA'$ şi prima afirmaţie este dovedită. Pe de altă parte, $X' \in [AA']$ şi $\frac{X'A}{X'A'} = \frac{XA}{XA'} = \frac{1}{2}$, deci $2X'A = X'A'$, de unde $X'A = AA'$. Aşadar X' şi A' sunt simetrice faţă de A.

2. Aplicaţii. Fie D, D_a, D_b, D_c punctele de tangenţă a cercurilor înscris, A-exînscris, B-exînscris respectiv C-exînscris triunghiului ABC cu dreapta BC. Amintim că au loc egalităţile [**1**], p.30:

$$DB = D_aC = p - b \quad \text{şi} \quad D_bC = D_cB = p - a \quad (2p = a + b + c);$$

primele spun că punctele D şi D_a sunt izotomice faţă de B şi C, iar ultimele că această proprietate o au şi punctele D_b şi D_c. Putem presupune că $AB \neq AC$ pentru a evita cazul trivial în care $\triangle ABC$ ar fi isoscel cu vârful A.

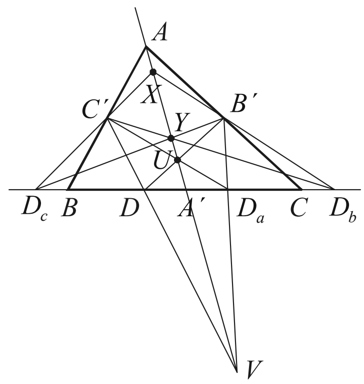
Propoziţia 2. *Relativ la punctele D_b, D_c, sunt adevărate afirmaţiile:*
1° $B'D_b$ *şi* $C'D_c$ *se intersectează într-un punct* $X \in (AA^*)$*;*
2° $B'D_c$ *şi* $C'D_b$ *se intersectează într-un punct* $Y \in (A^*G)$*;*
3° $\dfrac{XA}{XA'} + \dfrac{YA}{YA'} = 2$*;*
4° X *este izotomicul lui* G *în raport cu* A *şi* A' *dacă şi numai dacă* $2a = b + c$*.*

Demonstraţie. 1° şi 2° decurg direct din Propoziţia 1 şi observaţia de mai sus. De asemenea, avem

$$\frac{XA}{XA'} + \frac{YA}{YA'} = \frac{D_bC}{D_bA'} + \frac{D_cC}{D_cA'} = \frac{p-a}{(p-a)+a/2} + \frac{p}{p-a/2} = \frac{2p-a}{p-a/2} = 2,$$

adică are loc 3°. În sfârşit, având în vedere Corolarul, X este izotomicul lui G dacă şi numai dacă $D_bC = \dfrac{a}{2}$, adică $p - a = \dfrac{a}{2}$ sau $2a = b + c$.

Observaţie. Triunghiurile ce satisfac condiţia $2a = b+c$ (o latură este media aritmetică a celorlaltor două) sunt speciale, cu multe proprietăţi cunoscute (în [**2**], p. 242, sunt date opt proprietăţi). Afirmaţia 4° indică o nouă proprietate caracteristică lor.



Un rezultat similar se obţine dacă luăm punctele izotomice D, D_a în locul punctelor D_b, D_c.

Propoziţia 3. *Dacă* $\triangle ABC$ *satisface condiţia* $|b - c| \neq \dfrac{a}{2}$*, atunci relativ la punctele* D*,* D_a *avem:*
1° $B'D$ *şi* $C'D_a$ *se intersectează în* $U \in AA'$*;*
2° $B'D_a$ *şi* $C'D$ *se intersectează în* $V \in AA'$*;*
3° $\dfrac{UA}{UA'} - \dfrac{VA}{VA'} = \pm 2$ *(+ în cazul* $b > c$ *şi − în cazul* $b < c$*).*

Omitem demonstraţia, ce urmează pe cea din Propoziţia 2, dar menţionăm că prin condiţia $|b - c| \neq \dfrac{a}{2}$ se evită ca D sau D_a să fie mijlocul segmentului $[A'C]$.

Observaţie. Punctele X', Y', U', V' – conjugatele armonic ale punctelor X, Y, U, V în raport cu A şi A' – sunt alte patru puncte pe dreapta AA' care pot fi puse în conexiune cu punctele de tangenţă D, D_a, D_b, D_c, aşa cum se indică în Propoziţia 1. Rămâne în seama cititorului examinarea lor.

Bibliografie

1. **T. Lalescu** - *Geometria triunghiului*, Ed. Tineretului, Bucureşti, 1958.
2. **V. Gh. Vodă** - *Vraja geometriei demodate*, Ed. Albatros, Bucureşti, 1983.