Asupra problemei XII.32 din RecMat - 2/2002

Marian TETIVA[1]

În numărul 2/2002 al **Recreaţiilor Matematice** a fost publicată problema

XII.32. *Fie* $(G,\cdot)$ *grup, iar* $a\in G\backslash\{e\}$ *fixat. Arătaţi că numărul morfismelor surjective de la* G *la* $(\mathbb{Z}_3,+)$ *cu proprietatea că* $f(x)=\widehat{2}\Leftrightarrow x=a$ *este egal cu numărul subgrupurilor* H *ale lui* G *care nu-l conţin pe* a *şi care au proprietatea că* $x^3\in H$, $\forall x\in G$.

Dana Stan, elevă, Iaşi

Ideea autoarei era stabilirea unei corespondenţe bijective între mulţimile

$$A=\left\{f:G\to\mathbb{Z}_3\mid f\text{ morfism surjectiv cu }f(x)=\widehat{2}\Leftrightarrow x=a\right\};$$
$$B=\left\{H\le G\mid a\notin H\text{ şi }x^3\in H,\forall x\in G\right\}.$$

Pentru aceasta, se defineşte funcţia $F:A\to B$ prin $F(f)=f^{-1}(\widehat{0})$. Avem că $f^{-1}(\widehat{0})=\operatorname{Ker}f$ este subgrup în G, $a\notin f^{-1}(\widehat{0})$, iar $f\left(x^3\right)=3f(x)=\widehat{0}$, deci $x^3\in f^{-1}(\widehat{0})$, $\forall x\in G$; prin urmare, F este bine definită. Dacă $F(f)=F(g)$, atunci $f^{-1}(\widehat{0})=g^{-1}(\widehat{0})$. În plus, $f^{-1}(\widehat{2})=g^{-1}(\widehat{2})$, iar $f^{-1}(\widehat{1})=g^{-1}(\widehat{1})$ din surjectivitatea funcţiilor f şi g; în concluzie, F este injectivă.

Rămâne să dovedim că F este surjectivă. Fie $H\in B$; este normal să considerăm $f_H:G\to\mathbb{Z}_3$ dată prin $f_H(x)=\widehat{0}$, $\forall x\in H$, $f_H(a)=\widehat{2}$, iar $f_H(x)=\widehat{1}$, $\forall x\in G\setminus(H\cup\{a\})$. Avem că $F(f_H)=H$, f_H este surjectivă, iar $f_H(x)=\widehat{2}\Leftrightarrow x=a$. Este însă aplicaţia f_H astfel definită morfism de grupuri? Dovedirea acestui fapt impune studierea modului în care condiţia din ipoteză influenţează structura grupului G. Acest studiu va releva că ipoteza poate fi slăbită, concluzia poate fi îmbunătăţită şi va permite obţinerea unei generalizări interesante a problemei în discuţie.

Fie deci $f:G\to\mathbb{Z}_3$ morfism de grupuri astfel încât există $a\in G\setminus\{e\}$ cu proprietatea

$$f(x)=\widehat{2}\Leftrightarrow x=a \qquad (*)$$

Avem atunci $f(a)=\widehat{2}$, apoi $f\left(a^2\right)=\widehat{2}+\widehat{2}=\widehat{1}$ şi $f\left(a^3\right)=\widehat{0}$; prin urmare, condiţia de surjectivitate impusă lui f este superfluă. În continuare, $f\left(a^4\right)=\widehat{2}$ şi din $(*)$ obţinem că $a^4=a$, adică $a^3=e$. Pe de altă parte, fie $b\in G$ astfel încât $f(b)=\widehat{0}$; avem succesiv:

$$f(ab)=f(a)+f(b)=\widehat{2}+\widehat{0}=\widehat{2}\Rightarrow ab=a\Rightarrow b=e.$$

Iar dacă se consideră $c\in G$ cu $f(\widehat{c})=\widehat{1}$, atunci

$$f\left(c^2\right)=f\left(c^5\right)=\widehat{2}\Rightarrow c^2=c^5=a\Rightarrow c^2=a\text{ şi }c^3=e\Rightarrow ac=e\Rightarrow c=a^2.$$

În concluzie, $G=\left\{e,a,a^2\right\}$, cu a element de ordin 3, deci există un singur morfism ca în enunţ ($f(e)=\widehat{0}$, $f(a)=\widehat{2}$, $f\left(a^2\right)=\widehat{1}$) şi un singur subgrup H cu proprietăţile cerute, $H=\{e\}$ (oricum, şi morfisme şi subgrupuri sunt câte două de toate!).

Iată acum generalizarea anunţată:

[1] Profesor, Colegiul Naţional "Gh. Roşca Codreanu", Bârlad

Propoziţie. *Fie* $(C, \cdot)$ *un grup ciclic şi* $g \in C$ *un generator al său. Fie* $(G, \cdot)$ *un alt grup (notăm la fel operaţiile celor două grupuri, pentru simplitate). Presupunem că există un morfism* $f : G \to C$ *şi un element* $a \in G$, $a \neq e$, *astfel încât* $f(x) = g \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = a$. *Atunci* G *este izomorf cu* C.

Demonstraţie. În primul rând, $f(a) = g \Rightarrow f\left(a^k\right) = g^k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. Acum, fie $x \in G$ un element oarecare. Trebuie să avem $f(x) = g^k$, pentru un anume $k \in \mathbb{Z}$. Rezultă (f fiind morfism) că $f\left(a^{1-k}x\right) = f(a)^{1-k} f(x) = g^{1-k}g^k = g$. Dar singurul element din G pentru care f ia valoarea g este a, deci în mod necesar avem $a^{1-k}x = a \Rightarrow x = a^k$. Aşadar orice element al lui G este o putere a lui a: $G \subseteq \left\{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

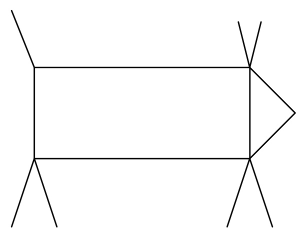
Din $f\left(a^k\right) = g^k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, rezultă că f este o aplicaţie surjectivă. În cazul în care C este finit şi are n elemente avem $g^n = e$ şi $f\left(a^{n+1}\right) = g^{n+1} = g \Rightarrow a^{n+1} = a \Rightarrow a^n = e$ (e fiind elementul neutru din C), deci $G \subseteq \left\{a^k \mid k = 0, 1, \ldots, n-1\right\}$ şi cum există o surjecţie de la G la C, obligatoriu G are tot n elemente şi, evident, este izomorf cu C.

Dacă C este infinit nu putem avea $a^k = a^m$ pentru exponenţii întregi distincţi k şi m, deoarece asta ar însemna şi $g^k = f\left(a^k\right) = f\left(a^m\right) = g^m$, ceea ce este imposibil, g fiind acum de ordin infinit. Deci şi în acest caz G este izomorf cu C, fiind acum grup ciclic infinit (generat tot de a, dar acesta nu mai are acum ordin finit). Demonstraţia este încheiată.

Recreaţii ... matematice

1. Patru oameni a, b, c şi d vor să traverseze într-o noapte un pod, venind toţi din aceeaşi direcţie. Pentru a ajunge toţi de cealaltă parte, au la dispoziţie 17 minute şi doar o lanternă. Podul susţine cel mult 2 oameni odată şi orice echipă care trece podul, de unul sau doi oameni, trebuie să aibă lanterna cu ei. Lanterna trebuie să fie transportată înainte şi înapoi, deci, ea nu poate fi aruncată etc. Se ştie că a traversează podul într-un minut, b în două minute, c în cinci minute, d în zece minute, iar o echipă traversează podul cu viteza celui mai lent dintre componenţii ei. Cum procedează cei patru pentru a trece podul în timpul stabilit?

2. Dacă vă puteţi imagina că desenul alăturat reprezintă un taur care se uită spre est, schimbaţi poziţia a două segmente astfel încât acesta să se uite spre vest.



Notă. Soluţiile problemelor **1** şi **2** se pot găsi la pagina 43.