Irelevanţa primitivabilităţii pentru ecuaţii funcţionale de forma $f(x+y) = g(f(x), f(y))$

Dan Ştefan MARINESCU şi Viorel CORNEA[1]

În [1] este demonstrat următorul rezultat:

"Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admite primitive şi $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, atunci f este continuă".

De remarcat că demonstraţia se bazează pregnant pe primitivabilitatea funcţiei f.

În cele ce urmează vom dovedi următoarea

Propoziţie. *Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie arbitrară şi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie care admite primitive. Dacă*

$$f(x+y) = g(f(x), f(x)), \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

atunci f este continuă.

Demonstraţie. Dacă f este injectivă, împreună cu faptul că f are proprietatea lui Darboux, suntem conduşi la monotonia funcţiei f pe $\mathbb{R}$. Se deduce imediat continuitatea funcţiei f, ceea ce încheie demonstraţia.

Dacă f nu este injectivă, vom dovedi că f este constantă pe $\mathbb{R}$ şi, în consecinţă, f este continuă. Din faptul că f nu este injectivă există $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$ şi $f(a) = f(b)$. Arătăm că

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists t_1, t_2 \in \mathbb{R} \quad \text{cu} \quad 0 < t_2 - t_1 < \varepsilon \quad \text{şi} \quad f(t_1) = f(t_2). \tag{1}$$

Pentru aceasta fie $n \in \mathbb{N}^*$ încât $\dfrac{b-a}{n} < 1$ şi funcţia

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = f\left(x + \frac{b-a}{n}\right) - f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Evident, h are proprietatea lui Darboux: $h = G'$, unde $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $G(x) = F\left(x + \dfrac{b-a}{n}\right) - F(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, cu F o primitivă a lui f.

Dacă h nu se anulează pe $\mathbb{R}$, cum h are proprietatea lui Darboux, avem $h(x) < 0$, sau $h(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Fie $h(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$; atunci

$$h(a) > 0,\ h\left(a + \frac{b-a}{n}\right) > 0,\ h\left(a + 2\,\frac{b-a}{n}\right) > 0, \ldots,\ h\left(a + (n-1)\,\frac{b-a}{n}\right) > 0,$$

de unde

$$f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) - f(a) > 0,$$

$$f\left(a + 2\,\frac{b-a}{n}\right) - f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) > 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

[1] Profesori, Liceul Teoretic "Iancu de Hunedoara", Hunedoara

$$f\left(a+n\,\frac{b-a}{n}\right)-f\left(a+(n-1)\,\frac{b-a}{n}\right)>0,$$

relaţii care adunate conduc la $f(b)>f(a)$, ceea ce este fals.

În consecinţă, există $c\in\mathbb{R}$ astfel ca $h(0)=0$, adică $f\left(c+\dfrac{b-a}{n}\right)=f(c)$; luând $t_1=c$, $t_2=c+\dfrac{b-a}{n}$ avem $f(t_1)=f(t_2)$ cu $0<t_2-t_1=\dfrac{b-a}{n}<\varepsilon$, adică (1) este dovedită.

Arătăm în continuare că t_2-t_1 este perioadă a funcţiei f. În adevăr,

$$\begin{aligned} f(x+t_2-t_1)&=f(x-t_1+t_2)=g\left(f(x-t_1),f(t_2)\right)=\\ &=g\left(f(x-t_1),f(t_1)\right)=f(x-t_1+t_1)=f(x)\,. \end{aligned}$$

Din aceasta şi (1) deducem că există un şir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de numere reale cu $a_n>0$, $a_n\to 0$ şi

$$f(x+a_n)=f(x)\,,\quad \forall x\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N}. \tag{2}$$

Fie F o primitivă a funcţiei f şi $n\in\mathbb{N}$. Definim funcţia

$$F_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad F_n(x)=\frac{F(x+a_n)-F(x)}{a_n},\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Evident F_n este derivabilă şi $F_n'(x)=0$ (în conformitate cu (2)), adică F_n este constantă pe $\mathbb{R}$; deci $F_n(x)=F_n(0)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, adică

$$\frac{F(x+a_n)-F(x)}{a_n}=\frac{F(a_n)-F(0)}{a_n},\quad \forall x\in\mathbb{R},$$

de unde, prin trecere la limită pentru n tinzând la $+\infty$, găsim $f(x)=f(0)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Aşadar, f este constantă pe R. Cu aceasta demonstraţia este încheiată.

Corolar. *Fie* $g:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *o funcţie,* $\mathcal{P}(\mathbb{R})=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\mid f$ admite primitive$\}$, $\mathcal{C}(\mathbb{R})=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\mid f$ continuă$\}$ *şi ecuaţia funcţională*

$$f(x+y)=g\left(f(x),f(y)\right),\quad \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Atunci ecuaţia (3) *are soluţie în* $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ *dacă şi numai dacă are soluţie în* $\mathcal{C}(\mathbb{R})$*.*

Demonstraţie. Dacă (3) are soluţie în $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, atunci, evident, are soluţie în $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Reciproc, dacă (3) are soluţie în $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, atunci conform Propoziţiei are soluţie în $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

Bibliografie

1. **S. Rădulescu, P. Alexandrescu, M. Chiriţă** - *Olimpiada locală*, Bucureşti, 1996.