Inegalităţi pentru mediane, bimediane, bisectoare

Dan Ştefan MARINESCU şi Viorel CORNEA[1]

Vom demonstra pentru început următoarea

Lemă. *Fie ABC un triunghi şi $M \in (BC)$ astfel încât $\frac{BM}{BC} = k \in (0,1)$. Atunci $AM < k\,AC + (1-k)\,AB$.*

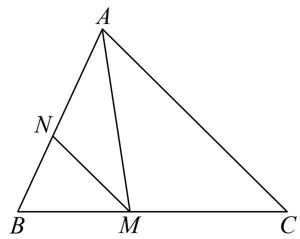

Fig. 1

Demonstraţie. Fie $N \in (AB)$ astfel încât $MN \parallel AC$ (fig. 1). Din teorema fundamentală a asemănării obţinem $MN = k\,AC$ şi $AN = (1-k)\,AB$. Aplicând în triunghiul AMN inegalitatea triunghiului avem $AM < MN + AN$ sau, conform celor de mai sus, $AM < k\,AC + (1-k)\,AB$.

Propoziţia 1. *Fie $ABCD$ un tetraedru, $M \in \operatorname{int}(BCD)$, $N \in (CM \cap BD$ şi $P \in (DM \cap BC$. Dacă $\frac{BN}{ND} = u$ şi $\frac{BP}{PC} = v$, atunci*

$$AM < \frac{1}{u+v+1}\,AB + \frac{v}{u+v+1}\,AC + \frac{u}{u+v+1}\,AD.$$

Demonstraţie. Fie $Q \in (BM \cap CD$ (fig. 2). În baza teoremei lui van Aubel,

$$\frac{BM}{MQ} = \frac{BN}{ND} + \frac{BP}{PC} = u + v, \quad \text{de unde} \quad \frac{BM}{BQ} = \frac{u+v}{u+v+1}. \tag{1}$$

Ţinând seama de (1) şi de Lemă, în $\triangle ABQ$ avem

$$AM < \frac{1}{u+v+1}\,AB + \frac{u+v}{u+v+1}\,AQ. \tag{2}$$

Din teorema lui Ceva, aplicată în $\triangle BCD$, obţinem $\frac{CQ}{QD} = \frac{u}{v}$, adică $\frac{CQ}{CD} = \frac{u}{u+v}$. Aplicând iarăşi Lema în $\triangle ACD$ vom avea

$$AQ < \frac{v}{u+v}\,AC + \frac{u}{u+v}\,AD. \tag{3}$$

Relaţiile (2) şi (3) conduc la

$$AM < \frac{1}{u+v+1}\,AB + \frac{v}{u+v+1}\,AC + \frac{u}{u+v+1}\,AD,$$

ceea ce încheie demonstraţia acestei propoziţii.

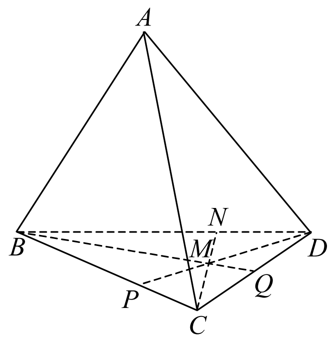

Fig. 2

Câteva cazuri particulare ale acestui rezultat prezintă interes în sine.

Corolarul 1 (Inegalitatea medianei). *Fie $ABCD$ un tetraedru şi G_A centrul de greutate al feţei BCD; atunci $AG_A < \frac{1}{3}(AB + AC + AD)$.*

[1] Profesori, Liceul Teoretic "Iancu de Hunedoara", Hunedoara

Demonstraţie. Evident, în acest caz $u = v = 1$ şi aplicând Propoziţia 1 obţinem inegalitatea cerută.

Corolarul 2. *Medianele unui tetraedru pot fi lungimile laturilor unui patrulater.*

Demonstraţie. Fie G_A, G_B, G_C, G_D centrele de greutate ale feţelor BCD, ACD, ABD, ABC în tetraedrul $ABCD$ şi G centrul său de greutate. Aplicând în tetraedrul $GBCD$ inegalitatea din Corolarul 1, avem $GG_A < \frac{1}{3}(GB + GC + GD)$. Conform unui rezultat cunoscut

$$BG = \frac{3}{4}BG_B\ , \quad CG = \frac{3}{4}CG_C\ , \quad DG = \frac{3}{4}DG_D\ .$$

Ca urmare, $GG_A < \frac{1}{4}(BG_B + CG_C + DG_D)$. Cum $GG_A = \frac{1}{4}AG_A$, găsim că $AG_A < BG_B + CG_C + DG_D$.

Procedând la fel găsim şi inegalităţi similare, ceea ce asigură faptul că medianele tetraedrului pot fi laturile unui patrulater.

Corolarul 3 (Inegalitatea bisectoarei). *Fie $ABCD$ un tetraedru, AE bisectoarea triedrului cu vârful în A, $E \in \operatorname{int}(BCD)$; atunci*

$$AE < \frac{S_B}{S_B + S_C + S_D}AB + \frac{S_C}{S_B + S_C + S_D}AC + \frac{S_D}{S_B + S_C + S_D}AD.$$

Demonstraţie. Din teorema planului bisector (AE este intersecţia planelor bisectoare ale diedrelor ce compun triedrul cu vârful în A), avem (fig. 2, cu $M \equiv E$): $u = \frac{BN}{ND} = \frac{S_D}{S_B}$ şi $v = \frac{BP}{PC} = \frac{S_C}{S_B}$. Aplicând Propoziţia 1, vom obţine:

$$AE < \frac{S_B}{S_B + S_C + S_D}AB + \frac{S_C}{S_B + S_C + S_D}AC + \frac{S_D}{S_B + S_C + S_D}AD,$$

adică inegalitatea din enunţ.

Corolarul 4. *Fie $ABCD$ un tetraedru şi I_A centrul cercului înscris în triunghiul BCD; atunci:*

$$AI_A < \frac{CD}{BC + CD + BD}AB + \frac{BD}{BC + CD + BD}AC + \frac{BC}{BC + CD + BD}AD.$$

Demonstraţie. În fig. 2 considerăm $M \equiv I_A$; din teorema bisectoarei, avem $u = \frac{BN}{ND} = \frac{BC}{CD}$ şi $v = \frac{BP}{PC} = \frac{BD}{CD}$. Se aplică Propoziţia 1.

Observaţie. Propoziţia 1 se poate demonstra şi cu ajutorul relaţiei lui Stewart, care permite determinarea lui AM în funcţie de AB, AC, AD şi u, v.

Propoziţia 2. *Fie $ABCD$ un tetraedru, $M \in (AB)$ astfel încât $\frac{AM}{AB} = u$ şi $N \in (CD)$ astfel încât $\frac{CN}{CD} = 1 - u$; atunci au loc*

$$|u\,BC - (1-u)\,AD| < MN < u\,BC + (1-u)\,AD,$$
$$|u\,BD - (1-u)\,AC| < MN < u\,BD + (1-u)\,AC.$$

Demonstraţie. Fie $P \in (AC)$ astfel încât $MP \parallel BC$ (fig. 3). Din teorema fundamentală a asemănării avem $MP = u\,BC$ şi $\frac{PC}{AC} = 1 - u$. Cum $\frac{CN}{CD} = 1 - u$, vom obţine că $PN \parallel AD$ şi în consecinţă, în baza teoremei pomenite mai sus, vom avea $PN = (1-u)\,AD$. Deoarece punctele M, P, N nu pot fi coliniare, din inegalităţile triunghiului obţinem

$$|MP - PN| < MN < MP + PN$$

sau, după înlocuiri, avem

$$|u\,BC - (1-u)\,AD| < MN < u\,BC + (1-u)\,AD.$$

Procedând la fel obţinem şi al doilea grup de inegalităţi.

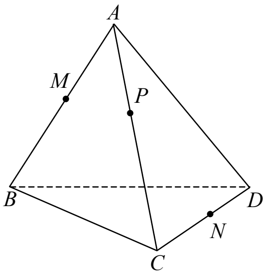

Fig. 3

Corolarul 5 (Inegalităţile bimedianei). *Fie $ABCD$ un tetraedru, M mijlocul lui $[AB]$ şi N mijlocul lui $[CD]$; atunci*

$$|BC - AD| < 2MN < BC + AD, \quad |BD - AC| < 2MN < BD + AC.$$

Demonstraţie. Luând $u = \dfrac{1}{2}$ în Propoziţia 2, găsim inegalităţile enunţate.

Pentru inegalităţile care urmează avem nevoie de următoarea

Lemă. *Fie $ABCD$ un tetraedru. Cu convenţiile din Propoziţia 1* (fig. 2), *are loc egalitatea:*

$$AM^2 = \frac{1}{1+u+v}\,AB^2 + \frac{v}{1+u+v}\,AC^2 + \frac{u}{1+u+v}\,AD^2 - \\ - \frac{v}{(1+u+v)^2}\,BC^2 - \frac{u}{(1+u+v)^2}\,BD^2 - \frac{uv}{(1+u+v)^2}\,CD^2.$$

Demonstraţie. Ca în Propoziţia 1, obţinem $\dfrac{BM}{BQ} = \dfrac{u+v}{1+u+v}$ şi $\dfrac{CQ}{CD} = \dfrac{u}{u+v}$. Aplicând relaţia lui Stewart în triunghiul ABQ, avem:

$$AM^2 = \frac{1}{1+u+v}\,AB^2 + \frac{u+v}{1+u+v}\,AQ^2 - \frac{u+v}{(1+u+v)^2}\,BQ^2. \tag{1}$$

Aceeaşi relaţie aplicată în triunghiurile BCD şi ACD conduce la

$$BQ^2 = \frac{v}{u+v}\,BC^2 + \frac{u}{u+v}\,BD^2 - \frac{uv}{(u+v)^2}\,CD^2, \tag{2}$$

$$AQ^2 = \frac{v}{u+v}\,AC^2 + \frac{u}{u+v}\,AD^2 - \frac{uv}{(u+v)^2}\,CD^2. \tag{3}$$

Din (1), (2) şi (3) obţinem egalitatea din enunţ.

Propoziţia 3. *Fie $ABCD$ un tetraedru. Are loc inegalitatea*

$$AM \geq \frac{1}{2R}\left(\frac{1}{1+u+v}\,AB^2 + \frac{v}{1+u+v}\,AC^2 + \frac{u}{1+u+v}\,AD^2\right),$$

unde R este raza sferei circumscrise tetraedrului.

Demonstraţie. Fie A' punctul în care $(AM$ intersectează a doua oară sfera circumscrisă tetraedrului. Avem evident

$$2R \cdot AM \geq AA' \cdot AM = (AM + A'M)\,AM = AM^2 + A'M \cdot AM. \tag{1}$$

Puterea punctului M faţă de sferă este egală cu

$$A'M \cdot AM = R^2 - OM^2, \tag{2}$$

unde O este centrul sferei. Din lemă, vom avea:

$$\begin{aligned} AM^2 &= \frac{1}{1+u+v} AB^2 + \frac{v}{1+u+v} AC^2 + \frac{u}{1+u+v} AD^2 - \\ &- \frac{v}{(1+u+v)^2} BC^2 - \frac{u}{(1+u+v)^2} BD^2 - \frac{uv}{(1+u+v)^2} CD^2, \quad (3) \\ OM^2 &= \frac{1}{1+u+v} OB^2 + \frac{v}{1+u+v} OC^2 + \frac{u}{1+u+v} OD^2 - \\ &- \frac{v}{(1+u+v)^2} BC^2 - \frac{u}{(1+u+v)^2} BD^2 - \frac{uv}{(1+u+v)^2} CD^2. \end{aligned}$$

Cum $OB = OC = OD = R$, ultima egalitate devine:

$$OM^2 = R^2 - \frac{v}{(1+u+v)^2} BC^2 - \frac{u}{(1+u+v)^2} BD^2 - \frac{uv}{(1+u+v)^2} CD^2. \tag{4}$$

Din (1), (2), (3) şi (4) obţinem inegalitatea din enunţ.

Corolarul 6. *Fie $ABCD$ un tetraedru şi G_A centrul de greutate al feţei BCD; atunci*

$$AG_A \geq \frac{1}{6R} \left(AB^2 + AC^2 + AD^2\right).$$

Demonstraţie. În Propoziţia 3 considerăm $M \equiv G_A$ $(u = v = 1)$.

În cele ce urmează, dacă $ABCD$ este un tetraedru, vom nota cu m_X, h_X, l_X mediana, înălţimea, bisectoarea din vârful X $(X \in \{A, B, C, D\})$.

Corolarul 7. *În orice tetraedru $ABCD$ avem*

$$3R(m_A + m_B + m_C + m_D) \geq a^2 + b^2 + c^2 + l^2 + m^2 + n^2,$$

unde $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $l = DA$, $m = DB$, $n = DC$, iar $m_A = AG_A$ etc.

Demonstraţie. Din Corolarul 6 avem $6R m_A \geq c^2 + b^2 + l^2$, $6R m_B \geq c^2 + a^2 + m^2$, $6R m_C \geq a^2 + b^2 + n^2$, $6R m_D \geq l^2 + m^2 + n^2$, de unde, prin sumare, obţinem inegalitatea cerută.

Corolarul 8. *Fie $ABCD$ un tetraedru şi I_A punctul în care bisectoarea din A a tetraedrului intersectează faţa BCD; atunci*

$$2R \cdot AI_A \geq \frac{S_B}{S_B + S_C + S_D} AB^2 + \frac{S_C}{S_B + S_C + S_D} AC^2 + \frac{S_D}{S_B + S_C + S_D} AD^2.$$

Demonstraţie. În Propoziţia 3 se pune $u = \dfrac{S_D}{S_B}$ şi $v = \dfrac{S_C}{S_B}$.

Observaţie. Ca şi în Corolarul 7 se pot obţine inegalităţi pentru suma bisectoarelor şi suma înălţimilor.

Bibliografie

1. **D. Brânzei, S. Aniţa, C. Cocea** - *Planul şi spaţiul euclidian*, Editura Academiei, Bucureşti, 1986.
2. **D. Şt. Marinescu** - *Inegalităţi pentru ceviene*, R.M.C. 1–2, 1995–1996, 5–7.
3. **N. Pavelescu, M. Lascu** - *Inegalităţi în triunghiuri şi tetraedre*, G.M. 10/1989, 362–366.