O construcţie geometrică a unor medii

Claudiu Ştefan POPA[1]

Se ştie că în orice trapez, lungimea liniei mijlocii este media aritmetică a lungimilor bazelor, iar lungimea segmentului care se sprijină pe laturile neparalele, trece prin intersecţia diagonalelor şi este paralel cu bazele, este media armonică a lungimilor bazelor. De asemenea, o paralelă la baze ce împarte o latură neparalelă în raportul $\frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$, determină în interiorul trapezului un segment a cărui lungime este media ponderată a bazelor cu ponderile m şi n (toate aceste rezultate pot fi găsite, spre exemplu, în [**2**]).

În lucrarea [**1**] se demonstrează că un segment paralel cu bazele şi având ca lungime media geometrică a acestora este situat "între" linia mijlocie şi segmentul paralel cu bazele ce trece prin intersecţia diagonalelor. Ne propunem în continuare să dăm o construcţie efectivă a segmentului paralel cu bazele, de lungime media geometrică a acestora, bazându-ne pe un rezultat interesant în sine şi pe care autorul nu l-a mai întâlnit în literatura de specialitate.

Propoziţie. *Fie $ABCD$ un trapez, $AB \parallel CD$, $\{O\} = AC \cap BD$ şi fie $S \in (AB)$, $R \in (CD)$ astfel încât $RS \parallel AD$. Atunci $O \in RS$ dacă şi numai dacă AS este media geometrică a lungimilor segmentelor $[CR]$ şi $[BS]$.*

Demonstraţie. Să presupunem că $O \in RS$ şi fie $P \in (AD)$, $Q \in (BC)$ astfel ca $PQ \parallel AB$, $O \in (PQ)$. Se ştie că $PO = OQ$ şi atunci $OQRD$ şi $OQSA$ sunt paralelograme ($OQ \parallel DR \parallel AS$, $OQ = DR = AS$). Urmează că $RQ \parallel BD$, $SQ \parallel AC$. Aplicând teorema lui Thales în $\triangle CDB$ şi $\triangle BAC$, obţinem că $\frac{DR}{RC} = \frac{BQ}{QC} = \frac{BS}{SA}$ şi, cum $DR = SA$, rezultă că $SA^2 = CR \cdot BS$.

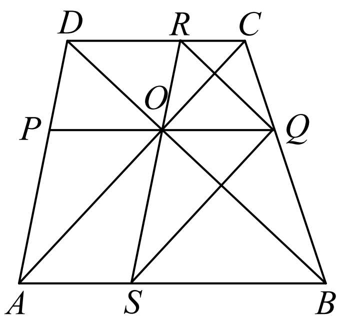

Fig. 1

Reciproc, presupunem că $RD = SA = \sqrt{SB \cdot RC}$. Notăm $SB = a$, $RC = b$ şi atunci $AB = a + \sqrt{ab}$, $CD = b + \sqrt{ab}$. Deoarece lungimea segmentului paralelel cu bazele ce trece prin intersecţia diagonalelor este media armonică a lungimilor bazelor, avem că

$$PQ = 2\,\frac{AB \cdot CD}{AB + CD} = 2\,\frac{\left(a + \sqrt{ab}\right)\left(b + \sqrt{ab}\right)}{a + b + 2\sqrt{ab}} = 2\,\frac{\sqrt{a}\sqrt{b}\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2}{\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2} = 2\sqrt{ab},$$

prin urmare $PO = OQ = AS = DR$, adică $PORD$ şi $POSA$ sunt paralelograme. De aici, $OR \parallel AD$, $OS \parallel AD$, deci $O \in RS$.

Drept consecinţă a acestui rezultat obţinem un procedeu de *construcţie a mediei geometrice şi a mediei pătratice ale bazelor unui trapez, ca segmente ce se sprijină pe laturile neparalele şi sunt paralele cu bazele.*

[1] Profesor, Şcoala "Alecu Russo", Iaşi

Fie, ca în figură, $[PQ]$ şi $[MN]$ segmentele ce reprezintă media armonică, respectiv media aritmetică ale bazelor trapezului $ABCD$. Obţinem un segment având ca lungime media geometrică a bazelor, folosind unul dintre procedeele cunoscute ([**2**]). Aşezăm acest segment în prelungirea uneia dintre bazele trapezului; punctul D' astfel obţinut îl unim cu B şi fie $\{E\} = BD' \cap AD$. Paralela prin E la baze determină segmentul $[EF]$ căutat.

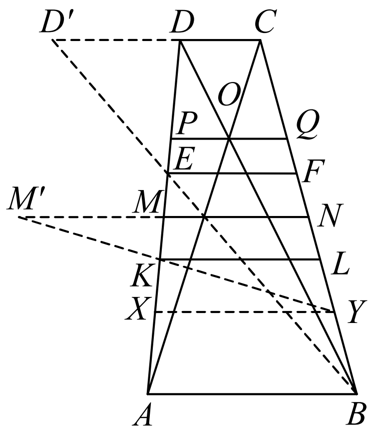

Fig. 2

Fie XY simetrica dreptei PQ faţă de MN, cu $X \in AD$, $Y \in BC$. Atunci

$$XY = 2\,MN - PQ = AB + CD - \frac{2\,AB \cdot CD}{AB + CD} =$$

$$= \frac{(AB + CD)^2 - 2\,AB \cdot CD}{AB + CD} = \frac{AB^2 + CD^2}{AB + CD} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{AB^2 + CD^2}{2}} = \sqrt{\frac{AB^2 + CD^2}{AB + CD} \cdot \frac{AB + CD}{2}} = \sqrt{XY \cdot MN}.$$

Prin urmare, construcţia cu rigorile impuse iniţial a segmentului de lungime media pătratică a bazelor trapezului $ABCD$ se reduce la construcţia segmentului $[KL]$ având ca lungime media geometrică a bazelor trapezului $XYMN$ (fig. 2).

Propunem spre rezolvare următoarele probleme:

1. Fie $ABCD$ trapez cu $[AB]$ baza mare şi $A' \in (AB)$, $D' \in (DC$ astfel încât $C \in (DD')$ şi $AA' = DD' = \sqrt{AB \cdot CD}$. Să se demonstreze că:

i) $A'C$, BD' şi AD sunt drepte concurente;

ii) dacă E este punctul de concurenţă de la *i*) şi $EF \parallel AB$, $F \in BC$, atunci $EF = \sqrt{AB \cdot CD}$.

2. Fie $ABCD$ un trapez, $AB \parallel CD$ şi punctele $E \in (AD)$ şi $F \in BC$ astfel încât $EF \parallel AB$. Trapezele $ABFE$ şi $EFCD$ au diagonalele respectiv paralele dacă şi numai dacă $EF = \sqrt{AB \cdot CD}$.

3. Fie trapezul $ABCD$ cu baza mare AB, $AC \cap BD = \{O\}$, $\{M, E, P\} \subset (AD)$, $\{N, F, Q\} \subset (BC)$ astfel încât $[MN]$ este linia mijlocie a trapezului, $EF \parallel AB$ şi $EF^2 = AB \cdot CD$, iar $PQ \parallel AB$, $O \in PQ$. Dacă notăm $R_{XY} = \dfrac{\mathcal{A}_{ABYX}}{\mathcal{A}_{CDXY}}$, atunci $R^2_{EF} = R_{MN} \cdot R_{PQ}$.

Bibliografie.

1. **L. Constantinescu -** *O interpretare geometrică a inegalităţii mediilor*, R. M. T. nr. 1/1982.
2. **J. Hadamard -** *Geometrie plană*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1960.