Proprietăţi de coliniaritate în patrulatere

Temistocle BÎRSAN[1]

În scopul stabilirii proprietăţilor de mai jos vom utiliza următoarele trei leme.

Lema 1. *Fie ABC un triunghi, $X \in (BC)$, $Y \in (CA)$ şi $\{Z\} = AX \cap BY$. Are loc relaţia*

$$\frac{BZ}{ZY} = \frac{BX}{XC} \cdot \frac{AC}{AY} \ . \qquad (1)$$

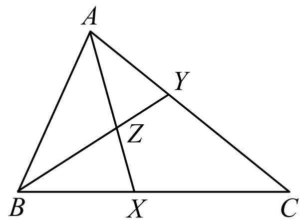

Fig. 1

Demonstraţie. Conform Teoremei lui Menelaus, aplicată triunghiului BCY şi transversalei XZ, avem $\dfrac{BX}{XC} \cdot \dfrac{AC}{AY} \cdot \dfrac{ZY}{BZ} = 1$, de unde deducem (1).

Lema 2 [**1**, p. 65]**.** *Fie $ABCD$ un patrulater convex şi $\{I\} = AC \cap BD$. Considerăm punctele $E \in (AB)$ şi $F \in (CD)$ cu poziţiile date de rapoartele $p = \dfrac{EA}{EB}$ şi respectiv $q = \dfrac{FD}{FC}$. Atunci*

$$I \in EF \Leftrightarrow IA \cdot ID = pq \cdot IB \cdot IC. \qquad (2)$$

Demonstraţie. Presupunem că AB şi CD se intersectează în S. Notând $\{I'\} = EF \cap AC$ şi $\{I''\} = EF \cap BD$, obţinem relaţiile:

$$\frac{ES}{EA} \cdot \frac{I'A}{I'C} \cdot \frac{FC}{FS} = 1 \quad (\triangle SAC \text{ şi transversala } EF),$$

$$\frac{ES}{EB} \cdot \frac{I''B}{I''D} \cdot \frac{FD}{FS} = 1 \quad (\triangle SBD \text{ şi transversala } EF),$$

de unde, prin egalare,

$$I'A \cdot I''D = pq \cdot I''B \cdot I'C. \qquad (*)$$

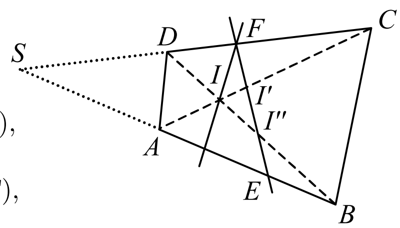

Fig. 2

Atunci, avem $I \in EF \Rightarrow I' = I'' = I \overset{(*)}{\Rightarrow} IA \cdot ID = pq \cdot IB \cdot IC$. Reciproc,

$$IA \cdot ID = pq \cdot IB \cdot IC \overset{(*)}{\Rightarrow} \frac{IA}{IC} \cdot \frac{ID}{IB} = \frac{I'A}{I'C} \cdot \frac{I''D}{I''B} \Rightarrow I' = I'' = I$$

(într-adevăr, dacă $I' \neq I$, atunci şi $I'' \neq I$ şi am avea, în poziţia din figură pentru EF, că $\dfrac{IA}{IC} < \dfrac{I'A}{I'C}$, $\dfrac{ID}{IB} < \dfrac{I''D}{I''B}$).

Menţionăm că egalitatea $(*)$ se obţine prin asemănare de triunghiuri, dacă $AB \parallel CD$, restul demonstraţiei rămânând acelaşi.

Lema 3. *În condiţiile Lemei 2 au loc relaţiile*

$$\frac{IE}{IF} = p\frac{q+1}{p+1} \cdot \frac{IB}{ID} = \frac{1}{q} \cdot \frac{q+1}{p+1} \cdot \frac{IA}{IC} \ . \qquad (3)$$

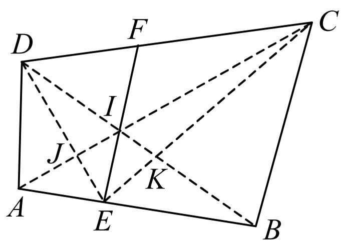

Fig. 3

Demonstraţie. În $\triangle ECD$ scriem relaţia lui van Aubel:

$$\frac{IE}{IF} = \frac{JE}{JD} + \frac{KE}{KC} \ ,$$

[1] Prof. dr., Catedra de Matematică, Univ. Tehnică "Gh. Asachi", Iaşi

unde $\{J\} = ED \cap AC$ şi $\{K\} = EC \cap BD$. Conform Lemei 1, avem

$$\frac{DJ}{JE} = \frac{ID}{IB} \cdot \frac{AB}{AE} \quad (\triangle ABD) \quad \text{şi} \quad \frac{CK}{KE} = \frac{IC}{IA} \cdot \frac{AB}{BE} \quad (\triangle BCA).$$

Ca urmare, obţinem:

$$\frac{IE}{IF} = \frac{IB \cdot AE}{ID \cdot AB} + \frac{IA \cdot BE}{IC \cdot AB} = \frac{p}{p+1} \cdot \frac{IB}{ID} + \frac{1}{p+1} \cdot \frac{IA}{IC} =$$
$$= \frac{1}{p+1} \cdot \frac{p \cdot IB \cdot IC + IA \cdot ID}{IC \cdot ID}.$$

Deoarece $IA \cdot ID = pq \cdot IB \cdot IC$ (Lema 2), rezultă că $\dfrac{IE}{IF} = \dfrac{p\,(q+1)}{p+1} \cdot \dfrac{IB}{ID}$. A doua egalitate rezultă din prima şi relaţia $IA \cdot ID = pq \cdot IB \cdot IC$.

Fie $ABCD$ un patrulater convex şi $\{I\} = AC \cap BD$. Considerăm un punct $M \in (AI)$ şi adoptăm notaţiile: $\{X\} = BM \cap AD$, $\{Y\} = DM \cap AB$, apoi $\{N\} = CY \cap BD$, $\{Q\} = CX \cap BD$ şi, în sfârşit $\{U\} = AN \cap BC$, $\{V\} = AQ \cap CD$ (fig. 4).

Considerăm poziţia punctului M pe diagonala AC dată de raportul

$$\alpha = \frac{AM}{MI}. \tag{4}$$

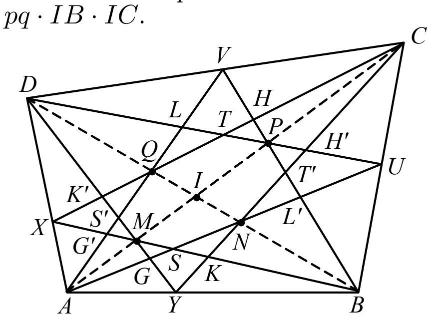

Fig. 4

Cu uşurinţă putem preciza poziţiile punctelor X, Y, N, Q, U şi V funcţie de α şi elementele patrulaterului. Într-adevăr, aplicăm Lema 1 de două ori în triunghiul $\triangle ABD$ şi obţinem relaţiile: $\dfrac{AM}{MI} = \dfrac{AX}{XD} \cdot \dfrac{BD}{BI}$ şi $\dfrac{AM}{MI} = \dfrac{AY}{YB} \cdot \dfrac{DB}{DI}$, adică

$$\frac{AX}{XD} = \alpha\,\frac{IB}{BD} \quad \text{şi} \quad \frac{AY}{YB} = \alpha\,\frac{ID}{BD}. \tag{5}$$

Pentru determinarea poziţiilor punctelor N şi Q aplicăm Lema 1 în $\triangle CAB$ şi $\triangle CAD$; obţinem $\dfrac{BN}{NI} = \dfrac{BY}{YA} \cdot \dfrac{CA}{CI}$ şi $\dfrac{DQ}{QI} = \dfrac{DX}{XA} \cdot \dfrac{CA}{CI}$ şi, ţinând seama de (5), vom avea

$$\frac{BN}{NI} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{AC \cdot BD}{IC \cdot ID}, \quad \frac{DQ}{QI} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{AC \cdot BD}{IB \cdot IC}. \tag{6}$$

Pentru punctele U şi V aplicăm Lema 1 în $\triangle ABC$ şi $\triangle ADC$: $\dfrac{BN}{NI} = \dfrac{BU}{UC} \cdot \dfrac{AC}{AI}$, $\dfrac{DQ}{QI} = \dfrac{DV}{VC} \cdot \dfrac{AC}{AI}$. Din aceste relaţii şi (6) rezultă că

$$\frac{BU}{UC} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{BD \cdot IA}{IC \cdot ID}, \quad \frac{DV}{VC} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{BD \cdot IA}{IB \cdot IC}. \tag{7}$$

Punem acum în evidenţă câteva proprietăţi de coliniaritate ale configuraţiei (fig. 4).

Propoziţia 1. *Punctul P definit de $\{P\} = BV \cap DU$ se află pe diagonala AC.*

Demonstraţie. A arăta că $P \in AC$ revine la a arăta că în $\triangle BCD$ cevianele DU, BV şi CI sunt concurente. Datorită relaţiilor (7), avem

$$\frac{BU}{UC} \cdot \frac{CV}{VD} \cdot \frac{DI}{IB} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{BD \cdot IA}{IC \cdot ID} \cdot \alpha \cdot \frac{IB \cdot IC}{BD \cdot IA} \cdot \frac{ID}{IB} = 1$$

şi aplicăm reciproca teoremei lui Ceva.

Observaţie. Octogonul stelat $AYBUCVDX$, generat pornind de la punctul M, este înscris în patrulaterul convex dat având patru din vârfurile sale tocmai vârfurile patrulaterului, iar celelalte patru vârfuri, ce alternează cu acestea, fiind situate pe laturile patrulaterului. Propoziţia precedentă şi cele care vor urma pun în evidenţă faptul că punctul I (de intersecţie a diagonalelor patrulaterului) joacă un rol important pentru acest octogon stelat.

Propoziţia 2. *Punctele din fiecare dintre tripletele X, I, U şi Y, I, V sunt coliniare.*

Demonstraţie. Conform Lemei 2, pentru ca punctele X, I, U să fie coliniare este suficient ca egalitatea următoare să fie îndeplinită:

$$ID \cdot IC = \frac{XD}{XA} \cdot \frac{UC}{UB} \cdot IA \cdot IB.$$

Dar, ţinând sema de (5) şi (7), egalitatea devine

$$ID \cdot IC = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{BD}{IB} \cdot \alpha \cdot \frac{IC \cdot ID}{BD \cdot IA} \cdot IA \cdot IB \Leftrightarrow 1 = 1.$$

La fel se arată că Y, I, V sunt coliniare.

Observaţie. Triunghiurile XBC şi UDA sunt omologice şi punctul I este centrul lor de omologie. Conform teoremei lui Desargue, perechile de drepte (BC, DA), (XB, UD) şi (XC, UA) au puncte de intersecţie coliniare. Observaţie similară relativ la triunghiurile YCD şi VAB.

Introducerea punctelor G, G', H, H', K, K', L, L', S, S', T, T' rezultă din fig. 4.

Propoziţia 3. *Punctele G, I, H sunt coliniare. Aceeaşi proprietate o au şi punctele G', I, H'.*

Demonstraţie. Conform Lemei 2, aplicată patrulaterului $YBVD$ şi punctelor G şi H, pentru coliniaritatea punctelor G, I, H este suficient să arătăm că

$$ID \cdot IV = \frac{GD}{GY} \cdot \frac{HV}{HB} \cdot IY \cdot IB. \tag{8}$$

Cu Lema 3, aplicată relativ la patrulaterul $ABCD$ şi punctele Y şi V, avem

$$\frac{IY}{IV} = p \cdot \frac{q+1}{p+1} \cdot \frac{IB}{ID}\ , \quad \text{unde} \quad p = \frac{AY}{YB} \quad \text{şi} \quad q = \frac{DV}{VC}\ .$$

Din (5) şi (7), avem că $p = \alpha\, \dfrac{ID}{BD}$, $q = \dfrac{1}{\alpha} \cdot \dfrac{BD \cdot IA}{IB \cdot IC}$ şi, după calcule, urmează că

$$\frac{IY}{IV} = \frac{\alpha\, IB \cdot IC + IA \cdot BD}{IC\, (\alpha\, ID + BD)}\ . \tag{9}$$

Pe de altă parte, utilizând Lema 1 în $\triangle ADB$ şi $\triangle CBD$, obţinem

$$\frac{GD}{GY} = \frac{ND}{NB} \cdot \frac{AB}{AY} \quad \text{şi} \quad \frac{HB}{HV} = \frac{QB}{QD} \cdot \frac{CD}{CV}\ . \tag{10}$$

Din nou apelând la relaţiile (5) şi (7), găsim

$$\frac{AB}{AY} = \frac{\alpha\, ID + BD}{\alpha\, ID}\ , \qquad \frac{CD}{CV} = \frac{\alpha\, IB \cdot IC + IA \cdot BD}{\alpha\, IB \cdot IC}\ . \tag{11}$$

Pentru a exprima rapoartele $\dfrac{ND}{NB}$ şi $\dfrac{QB}{QD}$ prin elementele patrulaterului dat, le scriem mai întâi sub forma $\dfrac{ND}{NB} = \dfrac{NI}{NB} + \dfrac{ID}{NB}$, $\dfrac{QB}{QD} = \dfrac{QI}{QD} + \dfrac{IB}{QD}$ şi apoi folosim relaţiile (6); se obţine

$$\frac{ND}{NB} = \frac{ID\,(\alpha IC + AC)}{IB \cdot AC} \quad \text{şi} \quad \frac{QB}{QD} = \frac{IB\,(\alpha IC + AC)}{ID \cdot AC}\ . \tag{12}$$

Înlocuind factorii prezenţi în (8) cu expresiile lor date de (9) – (12) se ajunge la egalitatea $1 = 1$. În concluzie, punctele G, I, H sunt coliniare. Similar se obţine că şi punctele G', I, H' sunt coliniare.

În aceeaşi manieră, adică folosind lemele şi formulele (4) – (7), se dovedesc şi rezultatele următoare.

Propoziţia 4. *Punctele K, I, L sunt coliniare. Sunt coliniare de asemenea şi punctele K', I, L'.*

Propoziţia 5. *Punctele S, I, T şi punctele S', I, T' sunt triplete de puncte coliniare.*

Observaţie. Întrucât proprietăţile precedente sunt de natură proiectivă nu este lipsită de interes stabilirea acestora cu mijloacele geometriei proiective.

Pentru configuraţia în discuţie pot fi puse în evidenţă şi proprietăţi de altă natură.

Propoziţia 6. *Dacă patrulaterul $ABCD$ dat este paralelogram, atunci patrulaterul $XYUV$ este un paralelogram cu laturile paralele cu diagonalele celui dat. Afirmaţia reciprocă este de asemenea adevărată (fig. 4).*

Demonstraţie. Faptul că $ABCD$ este paralelogram este echivalent cu

$$IA = IC \quad \text{şi} \quad IB = ID. \tag{13}$$

Din (13) şi (5) deducem că $\dfrac{AX}{XD} = \dfrac{AY}{YB}$, adică $XY \parallel BD$; din (13) şi (7) rezultă că $\dfrac{BU}{UC} = \dfrac{DV}{VC}$, adică $UV \parallel BD$. La fel deducem că $\dfrac{AX}{XD} = \dfrac{CV}{VD}$ ((13), (5) şi (7)) şi $\dfrac{AY}{YB} = \dfrac{CU}{UB}$ ((13), (5) şi (7)); ca urmare, $XV \parallel AC$ şi $YU \parallel AC$. În concluzie, $XYUV$ este paralelogram. Afirmaţia reciprocă se dovedeşte pe cale inversă.

Corolar. *Dându-se un paralelogram $ABCD$ şi un punct $M \in (AD)$, să se construiască numai cu rigla (negradată) un paralelogram înscris în acesta şi având punctul X ca unul dintre vârfurile sale.*

Soluţie. Cu rigla construim punctul M ca intersecţie a dreptelor BX şi AC. Pornind de la M construim cu rigla punctele Y, U, V aşa cum s-a procedat la începutul acestei note. Conform Propoziţiei 6, $XYUV$ îndeplineşte condiţiile cerute.

Bibliografie

1. **D. Mihalca, I. Chiţescu, M. Chiriţă** - *Geometria patrulaterului*, Teora, 1998.