O proprietate a sistemelor de generatori ale unor grupuri

Marian TETIVA[1]

În *Problema C:316* [**1**] se cere să se demonstreze că din orice sistem de generatori al grupului aditiv al numerelor reale se poate extrage orice element, mulţimea rămasă fiind, în continuare, sistem de generatori. *Problema 26* din [**3**, p.55] arată că de aceeaşi proprietate se bucură şi sistemele de generatori ale grupului $(\mathbb{Q}, +)$. Amintim că, dat fiind un grup abelian (aditiv) G, o mulţime nevidă $S \subseteq G$ se numeşte sistem de generatori al grupului G dacă, pentru orice $g \in G$, există $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ şi $s_1, s_2, \ldots, s_n \in S$ astfel încât $g = a_1 s_1 + a_2 s_2 + \ldots + a_n s_n$. Remarcăm că orice grup G are măcar un sistem de generatori (şi anume pe $S = G$). E uşor de văzut că, dacă un element $s \in S$ are o scriere de acest tip cu toate elementele $s_i \in S \backslash \{s\}$, atunci $S \backslash \{s\}$ este, de asemenea, sistem de generatori pentru G.

Ne propunem în cele ce urmează să arătăm că ambele probleme pot fi rezolvate în acelaşi fel, ţinând seama de o proprietate comună a grupurilor aditive ale numerelor reale, respectiv raţionale şi de următorul rezultat, pe care îl demonstrăm în această notă.

Propoziţie. *Fie G un grup divizibil, S un sistem de generatori al lui G şi $s \in S$. Atunci $S \backslash \{s\}$ este, încă, sistem de generatori pentru G.*

Vom considera grupul G abelian şi dat în notaţie aditivă; în aceste condiţii G se numeşte *grup divizibil* dacă pentru orice $g \in G$ şi orice număr întreg $n \neq 0$ există $x \in G$ astfel încât $nx = g$ (vom mai spune că "ecuaţia" $nx = g$ are soluţie in G). Evident, grupurile $(\mathbb{R}, +)$ şi $(\mathbb{Q}, +)$, despre care a fost vorba în problemele amintite mai sus, sunt grupuri divizibile. Un exemplu de grup care nu este divizibil îl reprezintă grupul $(\mathbb{Z}, +)$ al numerelor întregi (de exemplu, ecuaţia $2x = 1$ nu are soluţie în $\mathbb{Z}$). În continuare dăm două demonstraţii ale propoziţiei enunţate, una elementară, alta care face apel la o teoremă de izomorfism.

Demonstraţia I. Să considerăm mulţimea H a "combinaţiilor liniare", adică a elementelor din G care pot fi scrise în forma

$$a_1 s_1 + a_2 s_2 + \ldots + a_n s_n,$$

unde $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ şi $s_1, s_2, \ldots, s_n \in S \backslash \{s\}$; de asemenea, fie $K = \{ns \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Se verifică imediat că H şi K sunt subgrupuri ale lui G (ele se numesc subgrupurile lui G generate de $S \backslash \{s\}$, respectiv de $\{s\}$). Trebuie să arătăm ori că $s \in H$ (aşa vom proceda în această primă demonstraţie), ori că $H = G$ (ceea ce vom face în a doua demonstraţie).

Arătăm, mai întâi, că există un "multiplu" qs, $q \in \mathbb{Z}^*$, al lui s care aparţine lui H. Într-adevăr, conform ipotezei, există $x \in G$ astfel încât $2x = s$; tot conform ipotezei, x poate fi exprimat ca o combinaţie liniară a unor elemente din S, adică există $a, a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{Z}$ şi există $s_1, \ldots, s_p \in S \backslash \{s\}$ astfel încât $x = as + a_1 s_1 + \ldots a_p s_p$. Înlocuim aici $s = 2x$ şi obţinem egalitatea $(1 - 2a)\, x = a_1 s_1 + \ldots + a_p s_p$ care arată că $(1 - 2a)\, x \in H$; evident , $1 - 2a$ este un număr întreg nenul (este impar).

[1] Profesor, Colegiul Naţional "Gheorghe Roşca Codreanu", Bârlad

Deci există $q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ astfel încât $qs \in H$. Cum orice $x \in G$ are o scriere de forma $x = bs + b_1 s_1 + \ldots + b_r s_r$, cu $b, b_1, \ldots, b_r \in \mathbb{Z}$ şi $s_1, s_2, \ldots, s_r \in S \backslash \{s\}$, rezultă că, pentru orice $x \in G$, avem

$$qx = b\,(qs) + (qb_1)\,s_1 + \ldots + (qb_r)\,s_r \in H;$$

aşadar avem $qx \in H$ pentru orice $x \in G$. Dar, grupul G fiind divizibil şi q fiind un întreg nenul, există $x_0 \in G$ astfel încât $qx_0 = s$; atunci $s = qx_0 \in H$ (ceea ce înseamnă că s este o combinaţie liniară a unor elemente din $S \backslash \{s\}$), de unde concluzia că şi $S \backslash \{s\}$ este sistem de generatori pentru G este imediată.

Demonstraţia a II-a. Se bazează, în fond, pe aceleaşi idei, dar, după cum am spus, este formulată într-un limbaj mai abstract (v.[**3**]).

Se observă că avem $G = H + K$ (din ipoteza că S este un sistem de generatori al lui G); conform unei teoreme de izomorfism rezultă că $G/H = (H + K)/H$ este izomorf cu $K/(H \cap K)$.

Nu e greu de văzut că proprietatea unui grup de a fi divizibil se transmite prin morfisme surjective (adică, dacă G este un grup divizibil şi $f : G \to G'$ un morfism surjectiv de grupuri, atunci şi G' este un grup divizibil), cu atât mai mult prin izomorfisme. De asemenea, orice grup factor al unui grup divizibil este divizibil (deoarece între un grup şi un grup factor al său există întotdeauna un morfism surjectiv - surjecţia canonică).

Revenind la problemă, din observaţiile de mai sus deducem că grupul $K/(H \cap K)$ este divizibil. Acest grup este însă ciclic (deoarece K este astfel, prin însăşi definiţia lui, şi orice grup factor al unui grup ciclic este tot ciclic) şi, dintre grupurile ciclice, divizibil este numai grupul nul. Atunci rezultă că G/H (izomorf cu $K/(H \cap K)$) este grupul nul, deci $H = G$ (adică orice element din G este o combinaţie liniară de elemente din $S \backslash \{s\}$), ceea ce încheie demonstraţia.

(Un grup ciclic finit C, cu $n \geq 2$ elemente, nu este divizibil deoarece $nx = 0$ pentru orice $x \in C$ şi în C mai există şi alte elemente în afară de 0; de altfel, aceeaşi observaţie se poate face pentru un grup finit oarecare. În cazul în care este infinit, C este izomorf cu $\mathbb{Z}$, despre care am arătat deja că nu este divizibil.)

În încheiere menţionăm că o altă demonstraţie elementară poate fi găsită în [**2**] la pagina 95, iar ca observaţie finală să mai spunem că o consecinţă imediată a propoziţiei demonstrate este că orice sistem de generatori al unui grup divizibil trebuie să fie infinit (în particular, orice sistem de generatori al lui $(\mathbb{Q}, +)$ sau al lui $(\mathbb{R}, +)$ este infinit).

Bibliografie

1. T. Albu - *Problema C:316*, G.M. - 6/1983, p.256.

2. T. Albu, I. Ion - *Itinerar elementar în algebra superioară*, Editură All Educational, Bucureşti, 1997.

3. I. Ion, N Radu - *Algebra*, E.D.P., Bucureşti, 1991.