Şiruri recurente de tipul $x_{n+1} = f(n, x_n)$

Dan POPESCU[1]

În Recreaţii Matematice, nr.1/2002, am abordat şirurile definite recurent prin $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Mai general, cu un instrument de lucru asemănător - în principal, *teorema Stolz-Cesàro* - pot fi studiate şirurile recurente date de $x_{n+1} = f(n, x_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1 \in D$, unde $f : \mathbb{N}^* \times D \to D$ este o funcţie oarecare. Vom justifica prin exemple această afirmaţie.

1 (G.M.-12/1994, *23145*, **Gh. Marchitan**). *Fie şirul de numere reale pozitive $(x_n)_{n\geq 1}$ dat de $x_1 > 0$ şi $x_{n+1}^2 = n(x_n - x_{n+1})$, $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} n^{x_n} = e$.*

Soluţie. Deoarece $(x_n)_{n\geq 1}$ este şir descrescător de numere pozitive, există $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \in [0, x_1)$. Sumând egalităţile $x_{k+1}^2 = k(x_k - x_{k+1})$, $k = \overline{1, n-1}$, membru cu membru, obţinem relaţia $\frac{x_2^2+x_3^2+\ldots+x_n^2}{n-1} = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}}{n-1} - x_n$, $n \geq 2$. Deoarece $x_n \underset{n}{\to} l \Rightarrow \frac{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}}{n-1} \underset{n}{\to} l$ şi $x_n^2 \underset{n}{\to} l^2 \Rightarrow \frac{x_2^2+x_3^2+\ldots+x_n^2}{n-1} \underset{n}{\to} l^2$, trecând la limită în relaţia precedentă obţinem $l = 0$.

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n \ln n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1/x_{n+1} - 1/x_n}{\ln(1+1/n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}/x_n}{n\ln(1+1/n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{x_{n+1}+n} \cdot \frac{1}{\ln(1+1/n)^n} = 1$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} n^{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{x_n \ln n} = e$.

2 (G.M.-2/1997, p.58, **V. Nicula**). *Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 > 0$ şi $x_{n+1} = \frac{nx_n}{n+x_n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că acest şir este convergent şi să se calculeze limita sa.*

Soluţie. Observând că $(x_n)_{n\geq 1}$ este descrescător şi $x_n > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, există $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \in [0, x_1)$. Atunci $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{nx_n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} [(n+1)x_{n+1} - nx_n] = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}\left[(n+1) - \left(n + x_n^2\right)\right] = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}\left(1 - x_n^2\right) = l\left(1 - l^2\right)$ şi, deci, $l = 0$.

3 (Recreaţii Matematice - 1/2000, *XI.9*, **Gh. Iurea**). *Considerăm şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 \in (0,1)$ şi $x_{n+1} = x_n - nx_n^2$, $n \geq 1$. Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + nx_n)^n = e^2$.*

Soluţia este dată în Recreaţii Matematice - 1/2001, p.69.

Propunem cititorului câteva exerciţii de felul celor prezentate mai sus.

4 (G.M.-10,11,12/1990, *22216*, **D. M. Bătineţu - Giurgiu**). *Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 > 0$ şi $x_{n+1} = \frac{x_n}{1+anx_n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$, unde $a > 0$ este fixat. Să se arate că şirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(nx_n)_{n\geq 1}$ sunt convergente şi să se determine limitele lor.*

5 (G.M.-4/1991, *22344*, **D. Popescu**). *Dacă $x_1 \in (0,1)$ şi $x_{n+1} = \frac{x_n}{(1+x_n)^{x_{n+1}}}$, $n \in \mathbb{N}^*$, să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$.*

6 (G.M.-9,10,11,12/1992, *C:1330*, **D. Popescu**). *Dacă şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este definit prin $x_1 \in \mathbb{R}$ şi $x_{n+1} = \frac{1}{n}\sqrt{1 + x_n^2}$, $n \geq 1$, să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} (nx_n)^{1/x_n}$.*

7 (G.M.-2/2000, *C:2254*, **T. Tămâian**). *Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ dat prin $x_1 > 0$ şi $x_{n+1} = x_n + \frac{a}{x_n}$, $n \geq 1$, unde $a > 0$ este fixat. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \left(x_n - \sqrt{2an}\right)$.*

8 (R.M.T.-1/2002, *XI.108*, **R. Sătnoianu**). *Fie $a \in (0,1]$, $x_0 \in (0,a]$ şi $x_{n+1} = ax_n e^{-x_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Să se arate că şirurile $(x_n)_{n\geq 0}$ şi $(nx_n)_{n\geq 0}$ au limite, care se cer precizate.*

---

[1] Profesor, Colegiul Naţional "Ştefan cel Mare", Suceava