ARTICOLE ŞI NOTE MATEMATICE

Fractali

Ştefan Frunză[1]

Ce este un *fractal*? **Benoit B. Mandelbrot** a inventat termenul în 1975. Acest cuvânt derivă din *fractus* care în limba latină înseamnă fracturat (derivat, la rîndul său, din verbul *frangere* - a frânge, a rupe). El vrea să sugereze o mulţime care este mult mai "neregulată" decât mulţimile considerate în geometria clasică; cu cât aceasta este mărită, tot mai multe neregularităţi devin vizibile. În lucrarea sa *"The Fractural Geometry of Nature"* (1982), **Mandelbrot** argumentează că asemenea abstracţiuni geometrice se potrivesc adesea cu lumea fizică mai bine decât curbele şi suprafeţele netede. De exemplu, o linie de coastă neregulată (cum ar fi, de exemplu, coasta estică a Angliei) arată destul de netedă dacă o privim din avion, de la o înălţime mare, dar, pe măsură ce ne apropiem, tot mai multe neregularităţi devin vizibile. Aceste neregularităţi creează probleme şi în calcularea lungimei liniei de coastă sau a frontierei a două ţări vecine. Fizicianul englez **L. F. Richardson** studia, în 1961, variaţiile lungimilor aproximative $\mathcal{L}(\varepsilon)$ ale diverselor coaste, măsurate cu compasul, pe hartă, ca funcţie de etalonul ε şi constata că, pentru un larg domeniu de valori ale lui ε, lungimea varia după o putere a lui ε,

$$\mathcal{L}(\varepsilon) = N(\varepsilon)\,\varepsilon \propto \varepsilon^{-\rho}, \quad \rho > o$$

($N(\varepsilon)$ este numărul de paşi de lungime ε cuprinşi cu compasul în linia respectivă şi $a(\varepsilon) \propto b(\varepsilon)$ înseamnă că $a(\varepsilon)$ şi $b(\varepsilon)$ variază la fel când $\varepsilon \to 0_+$, mai precis $a(\varepsilon)/b(\varepsilon)$ tinde la o constantă nenulă când $\varepsilon \to 0_+$).

Se vede că pentru o curbă netedă cum este cercul, lungimea devine constantă ($\rho = 0$) când etalonul este suficient de mic în raport cu raza de curbură. Dimensiunea cercului este $D = 1$ (şi corespunde lui $\rho = 0$). Alte curbe însă prezintă un exponent $\rho > 0$, astfel încât lungimea lor creşte nedefinit pe măsură ce etalonul se micşorează; este imposibil să le atribuim o lungime finită, se spune că aceste curbe sunt nerectificabile.

Exponentul $1+\rho$ al lui $\dfrac{1}{N(\varepsilon)}$, definit mai sus, este în fapt o *"dimensiune fractală"*. Această determinare a măsurii fractale, prin acoperirea curbei cu discuri de rază ε, este exact cea utilizată de **Pontriaghin** şi **Schnirelman**, în 1932, pentru a defini dimensiunea de acoperire.

O variantă idealizată a unei asemenea situaţii, care este şi un model matematic de fractal, este *curba lui Helge von Koch* (1904). Se porneşte cu un segment unitate (*iniţiatorul*) care se împarte în 3 segmente congruente şi se înlocuieşte segmentul din mijloc cu cele două laturi ale unui triunghi echilateral, avându-l ca bază şi situat deasupra lui (*generatorul*).

În continuare se repetă aceeaşi procedură cu fiecare din cele 4 segmente obţinute; construcţia are un caracter recursiv. Curba poligonală obţinută în fiecare stadiu

[1] Conf. dr., Facultatea de matematică, Univ."Al. I. Cuza", Iaşi

este, după Mandelbrot, o structură prefractală. Curba lui Koch este figura obţinută la limită.

În această situaţie se poate urmări explicit cum depinde lungimea de etalonul de măsură.

În stadiul 0 avem $\varepsilon_1 = 1$, $N(\varepsilon_1) = 1$ şi $\mathcal{L}(\varepsilon_1) = 1$. Pentru $\varepsilon_2 = \dfrac{1}{3}$ avem $N(\varepsilon_2) = 4$ şi $\mathcal{L}(\varepsilon_2) = N(\varepsilon_2)\,\varepsilon_2 = \dfrac{4}{3}$; pentru $\varepsilon_3 = \dfrac{1}{3^2}$ avem $N(\varepsilon_3) = 4^2$ şi $\mathcal{L}(\varepsilon_3) = N(\varepsilon_3)\,\varepsilon_3 = 4^2/3^2$.

Se demonstrează prin inducţie că, pentru $\varepsilon_n = \dfrac{1}{3^{n-1}}$, $N(\varepsilon_n) = 4^{n-1}$ şi $\mathcal{L}(\varepsilon_n) = N(\varepsilon_n)\,\varepsilon_n = 4^{n-1}/3^{n-1}$. Se observă deci că $\mathcal{L}(\varepsilon_n) \to \infty$ pentru $\varepsilon_n \to 0$ $(n \to \infty)$. De aici rezultă şi dimensiunea fractală

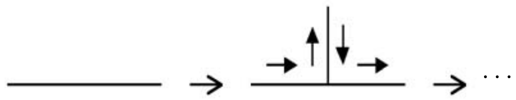
$$\frac{1}{N(\varepsilon_n)} = \frac{1}{4^{n-1}} = \frac{1}{3^{(n-1)\log_3 4}} = \varepsilon_n^{\log_3 4},$$

deci $D = 1 + \rho = \log_3 4 = \dfrac{\ln 4}{\ln 3} = 1,2618...$.

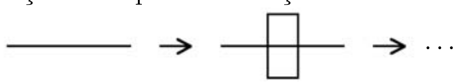
O variantă a curbei lui Koch se obţine dacă triunghiul echilateral se înlocuieşte cu un triunghi isoscel cu unghiul la vârf α şi baza $\dfrac{l}{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}$ (l-lungimea laturii segmentului iniţial).

Dimensiunea fractalului corespunzător este $D = \log 4/\log\left[2 + 2\sin(\alpha/2)\right]$.

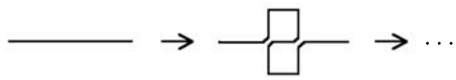
Cazul $\alpha = 0$ conduce la $D = 2$, adică o curbă care umple un triunghi. Aceasta nu e o curbă simplă deoarece are multe puncte duble.



Dimensiunea $D = 2$ se poate obţine pentru o curbă simplă (*curba lui Peano*) în care generatorul este o uşoară adaptare a situaţiei



pentru a elimina punctele duble:



Aceasta este o curbă simplă densă într-un pătrat; faptul că nu are puncte multiple se traduce prin faptul că e o curbă simplă. Deci are dimensiunea topologică 1.

Trei copii ale curbei lui Koch construite, în exterior, pe cele trei laturi ale unui triunghi echilateral formează o curbă simplă închisă, numită adesea *insula lui Koch* sau *curba fulgului de zăpadă* (snowflake).

Un fractal cu lacune, construit pe dreaptă este *mulţimea* (sau *praful*) *lui Cantor*. Ca şi curba lui Peano, acestă mulţime a fost imaginată din motive pur matematice. Se porneşte cu un segment care se împarte, în stadiul 1, în trei segmente congruente şi se elimină treimea din mijloc.

Cu fiecare din segmentele rămase se procedează analog.

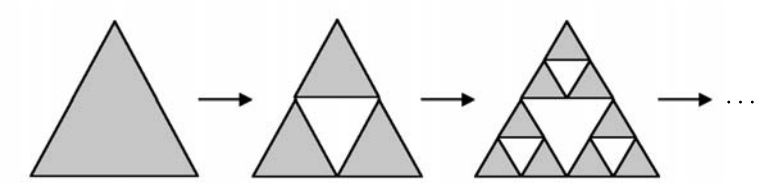
Ea este un fractal cu dimensiunea (fractală) $D = \log 2/\log 3 = 0,6309...$ şi dimensiunea topologică zero.

Dimensiunea fractală nu caracterizează ea singură obiectul. Există mulţimi de tip Cantor având aceeaşi dimensiune fractală, dar o structură spaţială diferită.

Se împarte un segment (iniţiatorul) în 27 segmente congruente şi se reţin, în prima etapă 4 segmente de lungime 1/9, egal depărtate, începând cu primul segment din stânga până la ultimul segment din dreapta. În continuare se procedează la fel cu fiecare din segmentele reţinute.

Cele două mulţimi de tip Cantor au aceeaşi dimensiune fractală, dar diferă prin *lacunaritatea* lor, o altă caracteristică ce se cere nu numai intuită ci şi clar definită.

Un alt fractal lacunar, cu o descriere similară, este *triunghiul* (sau *sita*) *lui Sierpinski.* Se porneşte cu un triunghi echilateral care se împarte prin mijloacele laturilor sale în 4 triunghiuri congruente şi se elimină triunghiul din mijloc. Cu fiecare din triunghiurile rămase se procedează analog.

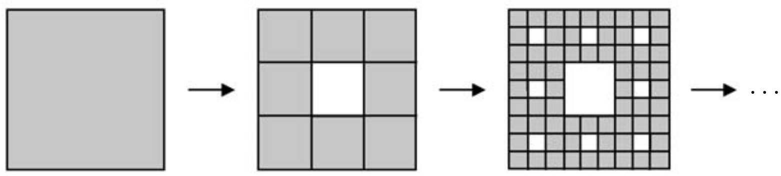


Mulţimea rămasă este sita lui Sierpinski. Acesta este un fractal cu dimensiunea $D = \log 3/\log 2 = 1,585...$

Adesea se consideră numai laturile şi se obţine un fractal cu aceeaşi dimensiune. Se poate arăta că ambele structuri prefractale converg la aceeaşi structură fractală în sensul unei distanţe naturale introduse de matematicianul român **Dimitrie Pompeiu** şi de matematicianul german **Felix Hausdorff**.

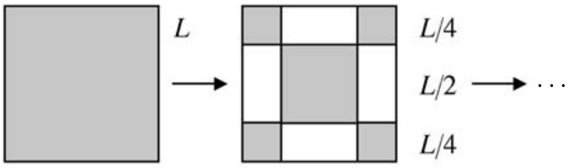
O altă variantă este *covorul* (*carpeta*) *lui Sierpinski.*

Se porneşte cu un pătrat care se împarte în 3^2 pătrate congruente şi se elimină pătratul din mijloc. Cu fiecare din pătratele rămase se procedează la fel.



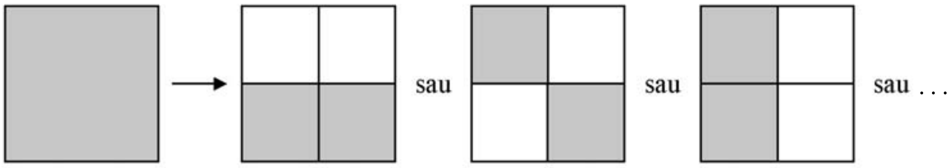
Exemplele de structuri fractale deterministe construite după cele două modele se pot multiplica la infinit. Aceste structuri se pot dovedi foarte interesante pentru a modela unele probleme de transport în medii poroase şi permit calcule analitice exacte pentru diverse proprietăţi fizice (conductanţă, vibraţii, electrozi fractali etc.). Se pot imagina şi analoage tridimensionale: *sita tridimensională a lui Sierpinski* şi *buretele lui Menger*, care au dimensiunile fractale $D = \log 4/\log 2 = 2$, respectiv $D = \log 20/\log 3 = 2,73\ldots$

O altă variantă posibilă constă în prezenţa simultană a mai multor scări de dilatare. Figura următoare ilustrează iterarea determinată de factori 1/4 şi 1/2.

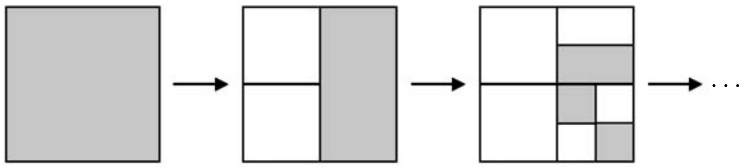


Dimensiunea sa fractală este $D = \log\left(1+\sqrt{17}\right)/\log 2 - 1$. Am dat pînă acum exemple de fractali determinişti (exacţi), dar se pot defini cu uşurinţă şi structuri fractale statistice. Cei mai simpli sunt cei omogeni, când aria, volumul (sau masa) structurii sunt repartizate uniform la fiecare nivel al ierarhiei, adică diverşii generatori conservă raportul de masă de la un nivel la următorul.

Astfel, se poate porni de la recurenţa cu caracter statistic



cu raportul de masă (arie) $2/4 = 1/2$ şi se poate construi *fractalul statistic* ce începe prin



Raportul de masă poate varia de la un pas la cel următor (*fractali eterogeni*).

Un alt exemplu de fractal statistic poate modela distribuţia craterelor Lunii. Ea poate fi privită ca o distribuţie de discuri ale căror centre urmează de exemplu o distribuţie Poisson şi ale căror raze sunt aleatoare cu o densitate de probabilitate de tipul $P(R > r) = Qr^{-\alpha}$. Numeroase asemenea exemple sunt descrise de Mandelbrot în [**3**].

Să ne reîntoarcem acum la conceptul de dimensiune. O tentativă naturală de a măsura dimensiunea unui obiect E constă în pavajul obiectului prin "paveuri" (aparţinând spaţiului în care obiectul este scufundat) de măsura $\mu = \varepsilon^{d(E)}$, unde $d(E)$ este dimensiunea obiectului. Dar cum $d(E)$ este apriori necunoscută, o soluţie constă în a face încercări luând unităţi de măsură $\mu = \varepsilon^{\alpha}$ cu un exponent α nedeterminat. Să considerăm de exemplu un pătrat ($d = 2$) de latură L şi să-l acoperim cu paveuri (pătrate) de latură ε. Măsura sa va fi dată de $M = N\mu$, unde N e numărul de paveuri, adică $N = (L/\varepsilon)^d$. Astfel

$$M = N\varepsilon^{\alpha} = \left(\frac{L}{\varepsilon}\right)^{d} \varepsilon^{\alpha} = L^2 \varepsilon^{\alpha-2}.$$

Dacă se încearcă $\alpha = 1$ se obţine $M \to \infty$ când $\varepsilon \to 0_+$; lungimea unui pătrat este infinită. Dacă se încearcă $\alpha = 3$, se găseşte că $M \to 0$ când $\varepsilon \to 0_+$; "volumul" unui pătrat este nul. Aria pătratului se obţine doar pentru $\alpha = 2$ şi dimensiunea sa este cea a unei suprafeţe $\alpha = d = 2$.

Faptul că această metodă se poate aplica pentru un α real oarecare permite generalizarea la dimensiuni care nu sunt întregi. Se poate formaliza puţin această măsură. Mai întâi, având de-a face cu un obiect de formă oarecare, nu este în general posibil să-l acoperim cu paveuri identice de latură ε. Se poate însă acoperi obiectul prin bile V_i de diametru $d(V_i) \leq \varepsilon$. Aceasta oferă un plus de supleţe, dar impune să luăm limita inferioară a sumei măsurilor elementare $\mu = d(V_i)^{\alpha}$. Se obţine astfel ceea ce se numeşte *α-măsura de acoperire* (**Hausdorff** 1919, **Besicovici** 1935) definită prin

$$m^{\alpha}(E) = \lim_{\varepsilon \to 0} \inf \left\{ \sum d(V_i)^{\alpha} : E \subset \cup V_i, d(V_i) \leq \varepsilon \right\}.$$

Se defineşte *dimensiunea Hausdorff-Besicovici* prin

$$d(E) = \inf \{\alpha : m^{\alpha}(E) = 0\} = \sup \{\alpha : m^{\alpha}(E) = \infty\}.$$

Deci dimensiunea Hausdorff-Besicovici este valoarea lui α pentru care m^{α} face un salt de la zero la infinit. Această măsură pentru $\alpha = d(E)$ poate fi orice număr între zero şi infinit.

Aceste consideraţii sugerează, de exemplu, că lungimea unei curbe nerectificabile trebuie înlocuită cu măsura Hausdorff corespunzătoare.

Există şi alte definiţii ale dimensiunii unei mulţimi, unele echivalente, altele diferite de dimensiunea Hausdorff-Besicovici. Se poate defini, de asemenea, o dimensiune topologică; o mulţime formată dintr-un punct are dimensiunea topologică zero, o mulţime ce poate fi pusă în corespondenţă bijectivă şi bicontinuă (homeomorfism) cu o curbă netedă are dimensiunea topologică 1 ş.a.m.d.

O definiţie-tentativă a fractalilor, propusă de Mandelbrot, constă în a cere ca dimensiunea Hausdorff-Besicovici să fie strict mai mare ca dimensiunea topologică. Aceasta se referă desigur la fractalii ideali, obţinuţi din prefractali prin trecere la limită în raport cu distanţa Pompeiu-Hausdorff.

Trebuie precizat că fractalii au fost introduşi şi utilizaţi în matematică încă la sfârşitul secolului XIX-lea de Cantor, Peano, Sierpinski, Menger ş.a. Aceste exemple au fost considerate multă vreme ca situate împotriva naturii. Este meritul incontestabil al lui B.Mandelbrot de a fi demonstrat că mulţimile fractale modelează o întreagă varietate de fenomene ştiinţifice, de la cele moleculare la cele astronomice: mişcarea browniană a particulelor, turbulenţa în fluide, creşterea plantelor, studiul rocilor, materiale compozite, polimeri şi geluri, peisaje, munţi, linii de coastă geografice, distribuţia galaxiilor în univers şi chiar fluctuaţiile de preţuri pe pieţele de schimb. Ultimul eseu al lui Mandelbrot se referă la aceste fluctuaţii.

Mulţimile fractale joacă un rol important în unele ramuri ale matematicii, cum ar fi teoria numerelor şi ecuaţiile diferenţiale neliniare (stabilitate şi haos).

Astfel, ceea ce a părut la început un concept de matematică pură a găsit numeroase aplicaţii în ştiinţe. Dacă aceste aplicaţii vor continua să se diversifice şi să se adâncească, s-ar putea ca studiul fractalilor să devină o parte obligatorie a cursurilor universitare. Geometria fractală este completarea care lipsea geometriei euclidiene şi simetriei cristaline (sau cvasicristaline).

Bibliografie

1. K. Devlin - *Vârsta de aur a matematicii*, Theta, Bucureşti, 2000.
2. J.-F. Gornyet - *Physique et structures fractales*, Masson, Paris, 1992.
3. B. Mandelbrot - *The Fractal Geometry of Nature*, W.H.Freeman, 1982.
4. B. Mandelbrot - *Obiectele fractale*, Editura Nemira, 1998.