Generalizări ale teoremei lui Ceva şi aplicaţii

Temistocle BÎRSAN[1]

Teorema lui Ceva şi reciproca sa caracterizează concurenţa a trei ceviene cu ajutorul rapoartelor în care picioarele acestora împart laturile triunghiului. În locul cevienelor vom considera trei drepte oarecare şi vom exprima concurenţa lor în acelaşi mod: cu ajutorul rapoartelor în care punctele de intersecţie a dreptelor cu laturile triunghiului împart aceste laturi. Diversitatea poziţiilor celor trei drepte în raport cu triunghiul dat face posibile mai multe generalizări ale teoremei lui Ceva. Utilizarea segmentelor orientate este avantajoasă în gruparea cazurilor ce pot apărea. Ca şi în [**2**], *se exclud tacit unele poziţii triviale* ale celor trei drepte.

Vom începe cu două rezultate pregătitoare.

Lema 1. *Fie ABC un triunghi oarecare şi punctele $U \in AB$, $V \in AC$, $X \in BC$ şi $Y \in AC$. Notăm $u = \dfrac{\overline{UB}}{\overline{UA}}$, $v = \dfrac{\overline{VC}}{\overline{VA}}$, $x = \dfrac{\overline{XB}}{\overline{XC}}$, $y = \dfrac{\overline{YA}}{\overline{YC}}$ şi $\{T\} = UV \cap XY$. Atunci, avem:*

$$\frac{\overline{TU}}{\overline{TV}} = \frac{(1-v)\,(x-uy)}{(1-u)\,(1-vy)}.$$

Demonstraţie. Fie $\{X'\} = AB \cap XY$ (fig. 1). Teorema lui Menelaus aplicată triunghiului AUV şi secantei XY conduce la relaţia

$$\frac{\overline{TU}}{\overline{TV}} = \frac{\overline{YA}}{\overline{YV}} \cdot \frac{\overline{X'U}}{\overline{X'A}}. \qquad (1)$$

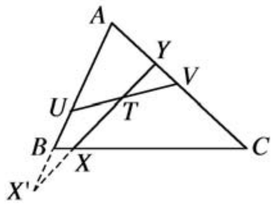

Fig. 1

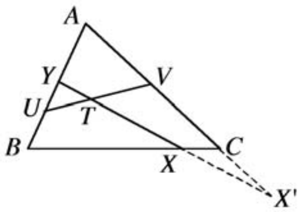

Fig. 2

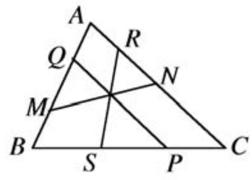

Fig. 3

Cum $y = \dfrac{\overline{YA}}{\overline{YC}} \Rightarrow \overline{YA} = \dfrac{y}{1-y}\overline{AC}$ şi $v = \dfrac{\overline{VC}}{\overline{VA}} \Rightarrow \overline{AV} = \dfrac{1}{1-v}\overline{AC}$, urmează că $\overline{YV} = \overline{YA} + \overline{AV} = \dfrac{1-vy}{(1-v)\,(1-y)}\overline{AC}$ şi, deci, $\dfrac{\overline{YA}}{\overline{YV}} = \dfrac{y\,(1-v)}{1-vy}$ (2).

Poziţia punctului X' pe latura AB este precizată de raportul $\dfrac{\overline{X'A}}{\overline{X'B}} = \dfrac{y}{x}$ (teorema lui Menelaus relativ la $\triangle ABC$ şi secanta XY). Deducem că $\overline{X'A} = \dfrac{y}{x-y}\overline{AB}$ şi cum $u = \dfrac{\overline{UB}}{\overline{UA}} \Rightarrow \overline{AU} = \dfrac{1}{1-u}\overline{AB}$, obţinem: $\overline{X'U} = \overline{X'A} + \overline{AU} = \dfrac{x-uy}{(1-u)\,(x-y)}\overline{AB}$. Ca urmare, $\dfrac{\overline{X'U}}{\overline{X'A}} = \dfrac{x-uy}{y\,(1-u)}$ (3).

Combinând (1), (2) şi (3), obţinem relaţia de demonstrat.

[1] Prof. dr., Catedra de matematică, Univ. Tehnică "Gh. Asachi", Iaşi

Lema 2. *Fie ABC un triunghi şi punctele $U \in AB$, $V \in AC$, $X \in BC$ şi $y \in AB$. Notând $u = \frac{\overline{UB}}{\overline{UA}}$, $v = \frac{\overline{VC}}{\overline{VA}}$, $x = \frac{\overline{XC}}{\overline{XB}}$, $y = \frac{\overline{YA}}{\overline{YB}}$ şi $\{T\} = UV \cap XY$ (fig. 2), avem:*

$$\frac{\overline{TU}}{\overline{TV}} = \frac{(1-v)(1-uy)}{(1-u)(x-vy)}.$$

Observaţia 1. Relaţia din Lema 1 a fost demonstrată în cazul particular din fig. 1: punctele U, V, X, Y sunt interioare laturilor pe care se află, dar rămâne valabilă (cu aceeaşi demonstraţie) şi în cazurile în care o parte dintre aceste puncte sau toate ar fi situate pe prelungirile laturilor respective. Doar cazul $XY \| AB$ (în care $x = y$) necesită o demonstraţie diferită; se ajunge la formula $\frac{\overline{TU}}{\overline{TV}} = \frac{x(1-v)}{1-vx}$ care se obţine, de altfel, din cea prezentă în Lema 1 dacă se ia în aceasta $x = y$. Aceleaşi observaţii se pot face şi privitor la Lema 2.

Propoziţia 1. *Fie dat un triunghi ABC şi dreptele d_1, d_2, d_3. Presupunem că d_1 intersectează AB şi AC în punctele M şi respectiv N, d_2 intersectează BC şi BA în P şi respectiv Q, iar d_3 intersectează CA şi CB în R şi respectiv S şi notăm $m = \frac{\overline{MB}}{\overline{MA}}$, $n = \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}$, $p = \frac{\overline{PC}}{\overline{PB}}$, $q = \frac{\overline{QA}}{\overline{QB}}$, $r = \frac{\overline{RA}}{\overline{RC}}$, $s = \frac{\overline{SB}}{\overline{SC}}$. Atunci d_1, d_2, d_3 sunt concurente dacă şi numai dacă este îndeplinită condiţia*

$$1 + mpr + nqs = mq + ps + rn, \quad \text{i.e.} \quad \begin{vmatrix} 1 & q & r \\ m & 1 & s \\ n & p & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Demonstraţie. Fie $\{T\} = MN \cap SR$ şi $\{T'\} = MN \cap PQ$ (fig. 3). În conformitate cu Lemele 1 şi 2, putem scrie:

$$\frac{\overline{TM}}{\overline{TN}} = \frac{(1-n)(s-mr)}{(1-m)(1-nr)}, \quad \frac{\overline{T'M}}{\overline{T'N}} = \frac{(1-n)(1-mq)}{(1-m)(p-nq)}.$$

Atunci, d_1, d_2, d_3 sunt concurente $\Leftrightarrow$ T coincide cu T' $\Leftrightarrow$ $\frac{(1-n)(s-mr)}{(1-m)(1-nr)} =$ $= \frac{(1-n)(1-mq)}{(1-m)(p-nq)} \Leftrightarrow 1 + mpr + nqs = mq + ps + rn$, q.e.d.

Dacă Q coincide cu A, S cu B, şi N cu C, adică $q = s = n = 0$, obţinem:

Corolarul 1 (Ceva). *Cevienele AP, BR, CM (se exclude cazul $AP \| BR \| CM$) sunt concurente dacă şi numai dacă $1 + mpr = 0$ sau* $\begin{vmatrix} 1 & 0 & r \\ m & 1 & 0 \\ 0 & p & 1 \end{vmatrix} = 0.$

Dacă S coincide cu B şi P cu C, adică $s = p = 0$, vom obţine un alt rezultat cunoscut([**4**, Teorema 3], [**3**, Teorema 1], [**2**, Prop.2] etc.):

Corolarul 2. *Dreapta MN trece prin punctul de intersecţie a cevienelor BR şi CQ dacă şi numai dacă $mq + nr = 1$.*

Aplicaţia 1. *Dacă pentru $k \in \mathbb{Z}$ fixat avem: $\frac{BS}{c^k} = \frac{SP}{a^k} = \frac{PC}{b^k}$, $\frac{CN}{a^k} = \frac{NR}{b^k} = \frac{RA}{c^k}$ şi $\frac{AQ}{b^k} = \frac{QM}{c^k} = \frac{MB}{a^k}$ (fig.3), atunci MN, PQ, RS sunt concurente.*

Demonstraţie. Avem: $m = n = -\dfrac{a^k}{b^k + c^k}$, $p = q = -\dfrac{b^k}{c^k + a^k}$, $r = s = -\dfrac{c^k}{a^k + b^k}$. Se verifică printr-un calcul simplu condiţia din Propoziţia 1.

Observaţia 2. Pentru k luând valorile 0, 1 şi 2 punctele de intersecţie corespunzătoare sunt G, I şi respectiv K (*Lemoine*).

Aplicaţia 2 (Newton). *Într-un patrulater circumscris unui cerc dreptele care unesc punctele de contact ale laturilor opuse trec prin punctul de intersecţie a diagonalelor.*

Demonstraţie. Să arătăm numai faptul că XY, AC şi BD sunt concurente (fig. 4). Vom aplica Corolarul 2. Avem:

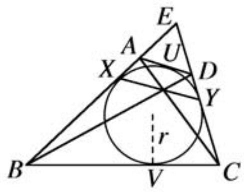

Fig. 4

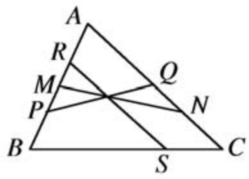

Fig. 5

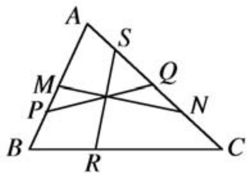

Fig. 6

$m = \dfrac{\overline{XB}}{\overline{XE}} = -\left(r \operatorname{ctg} \dfrac{B}{2}\right) / \left(r \operatorname{tg} \dfrac{B+C}{2}\right)$, $n = \dfrac{\overline{YC}}{\overline{YE}} = -\left(r \operatorname{ctg} \dfrac{C}{2}\right) / \left(r \operatorname{tg} \dfrac{B+C}{2}\right)$, $q = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = -\dfrac{d \sin D}{a \sin (B+C)}$ şi $r = \dfrac{\overline{DE}}{\overline{DC}} = -\dfrac{d \sin D}{c \sin (B+C)}$, unde $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$ şi $d = DA$. Cu acestea şi ţinând seama că $a = r\left(\operatorname{ctg} \dfrac{A}{2} + \operatorname{ctg} \dfrac{B}{2}\right)$ etc. şi că $\sin \dfrac{A+B}{2} = \sin \dfrac{C+D}{2}$, $\cos \dfrac{B+D}{2} = -\cos \dfrac{A+C}{2}$, se verifică prin calcul condiţia $mq + nr = 1$.

Propoziţia 2. *Dacă poziţiile punctelor M, N, P, Q, R, S (fig. 5) sunt precizate de rapoartele $m = \dfrac{\overline{MB}}{\overline{MA}}$, $n = \dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}}$, $p = \dfrac{\overline{PB}}{\overline{PA}}$, $q = \dfrac{\overline{QC}}{\overline{QA}}$, $r = \dfrac{\overline{RB}}{\overline{RA}}$, $s = \dfrac{\overline{SC}}{\overline{SB}}$, atunci dreptele MN, PQ, RS sunt concurente dacă şi numai dacă avem*

$$prs + mq + nr = mrs + np + rq, \quad \text{i.e.} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & p & r \\ n & q & rs \end{vmatrix} = 0.$$

Demonstraţie. Notăm $\{T\} = SR \cap NM$ şi $\{T'\} = SR \cap QP$. Conform Lemei 1, avem: $\dfrac{\overline{TS}}{\overline{TR}} = \dfrac{(1 - 1/r)(n - ms)}{(1 - s)(1 - m/r)}$ şi $\dfrac{\overline{T'S}}{\overline{T'R}} = \dfrac{(1 - 1/r)(q - ps)}{(1 - s)(1 - p/r)}$. Aşadar, MN, PQ, RS sunt concurente $\Leftrightarrow \dfrac{\overline{TS}}{\overline{TR}} = \dfrac{\overline{T'S}}{\overline{T'R}} \Leftrightarrow (n - ms)(1 - p/r) = (q - ps)(1 - m/r) \Leftrightarrow$ $prs + mq + nr = mrs + np + rq$.

Procedând la fel, dar cu utilizarea Lemei 2, se dovedeşte şi

Propoziţia 2′. *Dacă punctele M, N, P, Q, R, S (fig. 6) au poziţiile precizate de rapoartele $m = \dfrac{\overline{MB}}{\overline{MA}}$, $n = \dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}}$, $p = \dfrac{\overline{PB}}{\overline{PA}}$, $q = \dfrac{\overline{QC}}{\overline{QA}}$, $r = \dfrac{\overline{RB}}{\overline{RC}}$, $s = \dfrac{\overline{SC}}{\overline{SA}}$, atunci* *dreptele MN, PQ, RS sunt concurente dacă şi numai dacă avem*

$$qrs + ms + np = nrs + mq + ps, \quad \text{i.e.} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & p & rs \\ n & q & s \end{vmatrix} = 0.$$

Corolarul 3. *Ceviana AD, cu $D \in BC$ precizat de raportul $d = \dfrac{\overline{DC}}{\overline{DB}}$, trece prin punctul de intersecţie a dreptelor MN şi PQ dacă şi numai dacă*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ m & p & 1 \\ n & q & d \end{vmatrix} = 0, \quad \text{i.e.} \quad d = \frac{n-q}{m-p}.$$

Demonstraţie. În Propoziţia 2 (sau 2′) se face ca R să coincidă cu A (respectiv, S să coincidă cu A) şi se ia $s = d$ (respectiv, $r = 1/d$).

Aplicaţia 3. *Fie ABC un triunghi cu $a \leq b \leq c$. Fie D, E, F mijloacele laturilor (BC), (CA) şi respectiv (AB) şi D', E', F' mijloacele liniilor frânte BAC, CBA şi respectiv ACB (i.e. $BD' = CA + AD'$, $CB + BE' = AE'$ şi $AF' = BC + CF'$). Arătaţi că dreptele DD', EE' şi FF' sunt concurente (fig. 7).*

Demonstraţie. Rezultatul se obţine aplicând Propoziţia 2 cu $n = p = s = -1$, $m = \dfrac{\overline{E'B}}{\overline{E'A}} = -\dfrac{c-a}{a+c}$ (căci $2AE' = a + c$ şi $BE' = c - AE' = \dfrac{1}{2}(c-a)$), $q = \dfrac{\overline{F'C}}{\overline{F'A}} = -\dfrac{b-a}{a+b}$ şi $r = \dfrac{\overline{D'B}}{\overline{D'A}} = -\dfrac{b+c}{c-b}$.

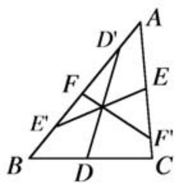

Fig. 7

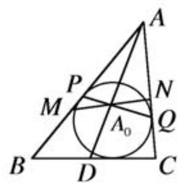

Fig. 8

Fig. 9

Observaţia 3. În [**1**] este dată o demonstraţie sintetică (se arată că DD', EE', FF' sunt bisectoare ale $\triangle DEF$), iar în [**5**, Teorema 2] una analitică.

În legătură cu Problema 191 [**6**] (a se vedea şi [**2**]) dăm

Aplicaţia 4. *Fie ABC un triunghi ce nu este isoscel. Fie A_0 punctul de intersecţie a dreptei ce uneşte picioarele bisectoarelor unghiurilor B şi C cu dreapta ce uneşte punctele de contact al cercului înscris cu laturile (AB) şi (AC) şi B_0, C_0 analoagele acestuia. Să se arate că dreptele AA_0, BB_0, CC_0 sunt concurente.*

Demonstraţie. Cu notaţiile din fig. 8, avem: $m = -\dfrac{a}{b}$, $n = -\dfrac{a}{c}$, $p = -\dfrac{p-b}{p-a} = -\dfrac{a+c-b}{b+c-a}$ şi $q = -\dfrac{p-c}{p-a} = -\dfrac{a+b-c}{b+c-a}$. În conformitate cu Corolarul 3, obţinem: $d = \dfrac{\overline{DC}}{\overline{DB}} = \dfrac{n-q}{m-p} = \ldots = \dfrac{b(a-c)(a-b+c)}{c(a-b)(a+b-c)}$. În acelaşi mod obţinem şi $e = \dfrac{\overline{EA}}{\overline{EC}} = \dfrac{c(b-a)(a+b-c)}{a(b-c)(-a+b+c)}$, $f = \dfrac{\overline{FB}}{\overline{FA}} = \dfrac{a(c-b)(-a+b+c)}{b(c-a)(a-b+c)}$. Ca urmare, $def = -1$ şi, deci, dreptele AA_0, BB_0, CC_0 sunt concurente.

Propoziţia 3. *Fie $D, M, P \in BC$, $Q \in AB$ şi $N \in AC$ (fig. 9) cu poziţiile precizate de* $d = \dfrac{\overline{DB}}{\overline{DC}}$, $m = \dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}}$, $p = \dfrac{\overline{PC}}{\overline{PB}}$, $q = \dfrac{\overline{QB}}{\overline{QA}}$ *şi* $n = \dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}}$. *Dreapta AD trece prin punctul de intersecţie a dreptelor MN şi PQ dacă şi numai dacă*

$$\begin{vmatrix} mn & q & d \\ n & pq & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{i.e.} \quad d = \frac{mn - q}{n - pq}.$$

Demonstraţie. Utilizăm Propoziţia 2 luând punctul N în vârful C şi înlocuind numerele m, n, p, q, r, s cu $1/d, 0, p, 1/q, 1/m, 1/n$ respectiv. Rezultatul dorit poate fi obţinut, în mod asemănător, şi prin utilizarea Propoziţiei $2'$.

Observaţie. Teorema lui Ceva este un caz particular al Propoziţiilor 2, $2'$, 3.

Aplicaţia 5. *Se notează cu A_1 centrul pătratului $D_1D_2D_3D_4$ înscris în triunghiul ABC cu $D_1, D_2 \in BC$, $D_3 \in CA$ şi $D_4 \in AB$. Similar se introduc şi punctele B_1, C_1. Să se arate că dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente (punctul lui Van Vecten).*

Demonstraţie. Aplicăm Propoziţia 3 luând drept MN şi PQ diagonalele pătratului $D_1D_2D_3D_4$. Notând cu l latura acestuia, avem: $m = \dfrac{\overline{D_1B}}{\overline{D_1C}} = -\dfrac{l \operatorname{ctg} B}{l + l \operatorname{ctg} C}$, $p = \dfrac{\overline{D_2C}}{\overline{D_2B}} = -\dfrac{l \operatorname{ctg} C}{l + l \operatorname{ctg} B}$ şi $n = q$. Condiţia din propoziţia amintită se scrie: $d = \dfrac{m-1}{1-p} = \ldots = -\dfrac{1 + \operatorname{ctg} B}{1 + \operatorname{ctg} C}$. Relativ la laturile (CA) şi (AB) obţinem $e = -\dfrac{1 + \operatorname{ctg} C}{1 + \operatorname{ctg} A}$, $f = -\dfrac{1 + \operatorname{ctg} A}{1 + \operatorname{ctg} B}$. Rezultă că $def = -1$ şi, deci, dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente.

Aplicaţia 6. *Fie D_b, D_c punctele de contact al cercului A - exînscris triunghiului ABC cu dreptele AB şi respectiv AC, iar perechile de puncte E_c, E_a şi F_a, F_b având semnificaţii analoage. Dacă notăm $\{A'\} = E_cE_a \cap F_bF_a$, $\{B'\} = F_aF_b \cap D_cD_b$ şi $\{C'\} = D_bD_c \cap E_aE_c$, atunci dreptele AA', BB', CC' sunt concurente în H -ortocentrul triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Dacă $\{D\} = AA' \cap BC$, se aplică Propoziţia 3 pentru a arăta că punctul D este piciorul înălţimii din A a triunghiului ABC etc.

Bibliografie

1. **F. D. Beznosikov** - *Problema 914*, Matematika v şkole, 3/1971, p.75 (enunţ) şi 1/1972, p.76 (soluţie).
2. **T. Bîrsan** - *Un criteriu de concurenţă a dreptelor*, Recreaţii Matematice, 4(2002), nr.1, 23-24.
3. **C. Chiser** - *Condiţii necesare şi suficiente ca o dreaptă să treacă prin puncte importante dintr-un triunghi*, G.M.-9/2000, 336-343.
4. **N. Oprea** - *Un punct şi o dreaptă remarcabile din planul unui triunghi*, G.M.-11/1996, 532-540.
5. **J. Tong** - *Perimeter bisectors of the triangle*, G.M.-3/1998 (seria informare - perfecţionare), 162-176.
6. ******* - *Problema 191*, Recreaţii Ştiinţifice, 4(1886), p.48 (enunţ) şi p.118 (soluţie).