Asupra unor structuri de grupuri

Alin SPUMĂ[1]

Scopul acestei note este de a prezenta câteva consecinţe ale unui rezultat privind construcţia structurilor transferate. Enunţul de la care plecăm este dat de problema **G.78** din [1] (enunţ modificat):

Propoziţia 1. *Dacă* $(G,\cdot)$ *este un grup, iar* $f : G \longrightarrow H$ *este o funcţie bijectivă, atunci pe* H *se poate defini o unică operaţie " $*$ " astfel ca* $(H,*)$ *să fie grup, iar aplicaţia* f *să devină izomorfism de grupuri.*

Demonstraţie. Operaţia "$*$" este dată de: $x*y = f(f^{-1}(x)\cdot f^{-1}(y))$. Se verifică uşor că $(H,*)$ devine un grup, având elementul neutru $f(e)$, e fiind elementul neutru al grupului G, iar pentru orice $x \in H$, simetricul său va fi $f((f^{-1}(x))')$, a' notând simetricul elementului $a \in G$. De asemenea, rezultă imediat că f este izomorfism între grupurile $(G,\cdot)$ şi $(H,*)$.

Observaţia 1. Structura de grup definită pe H se numeşte *structura transferată (indusă)* pe H prin intermediul bijecţiei f.

Observaţia 2. Dacă G este grup abelian, atunci şi H va fi tot grup abelian.

I. *Câteva consideraţii practice.*

Folosind Propoziţia 1, în baza unor structuri de grup cunoscute (aşa-zisele "*grupuri clasice*"), prin intermediul unor bijecţii între mulţimile suport ale acestor grupuri şi alte mulţimi (cât mai neconvenţionale posibil) putem "descoperi" noi grupuri, care apoi vor umple paginile manualelor, culegerilor de probleme şi ale revistelor de matematică. O modalitate simplă şi la îndemâna oricui...

Un exemplu rapid vom avea considerând funcţia liniară $f : (0,\infty) \longrightarrow (a,\infty)$, $f(x) = x + a$. Cum pe $\mathbf{R}_+^* = (0,\infty)$ înmulţirea determină structură de grup abelian, pe (a,∞) vom avea tot un grup abelian, anume, operaţia care se obţine este: $x*y = xy - a(x+y) + a^2 + a$. Dacă vrem ca exemplul nostru să fie şi mai simplu, putem particulariza parametrul a şi se vor obţine structuri de grup mai accesibile şi mai palpabile.

Iată un alt exemplu. Funcţia $g : \mathbf{R} \longrightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $g(x) = arctg\ x$, este o funcţie bijectivă. $(\mathbf{R},+)$ este un grup abelian şi, prin urmare, cu ajutorul Propoziţiei 1 şi a funcţiei g putem defini pe $M = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ operaţia $*$ dată de $x*y = arctg(\text{tg}\, x + \text{tg}\, y)$ încât $(M,*)$ să fie grup abelian (problema **25**, pag. 59 din [**2**]).

Tot în [1] găsim una din cele mai frumoase structuri de grup, anume Problema **2**, pag 56, care poate fi văzută ca o aplicaţie a Propoziţiei 1. Funcţia $h : \mathbf{R}_+^* \longrightarrow (-1,1)$, $h(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, este o bijecţie şi, folosind iarăşi faptul că $(\mathbf{R}_+^*,\cdot)$ este grup abelian, vom obţine pe $G = (-1,1)$ operaţia: $x*y = \dfrac{x+y}{1+xy}$. Această operaţie este folosită în obţinerea unor alte rezultate destul de interesante, cum ar fi problema C: 1548 din G. M. 6 / 1994.

---

[1] Prep. drd., Facultatea de Matematică, Univ. "Al. I. Cuza", Iaşi

În sfârşit, indicăm mai jos încă două bijecţii şi operaţiile induse:

- $f : (a,b) \to \mathbf{R}_+^*$, $f(x) = \dfrac{x-a}{b-x}$,

$$x * y = \frac{(a+b)xy - 2ab(x+y) + 2ab(a+b)}{2xy - (a+b)(x+y) + a^2 + b^2}$$

(*I. Toderiţă* - Problema 22155, G.M. 8-9/1990);

- Dacă $\mathcal{M} = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbf{R}, a^2 + b^2 \neq 0 \right\}$,

pentru bijecţia $g : (\mathbf{C}^*, \cdot) \to \mathcal{M}$, $g(a+ib) = M(a,b)$, operaţia indusă este cea de înmulţire a matricelor, iar $\mathcal{M}$ devine un grup abelian.

Bineînţeles, lista ar putea continua, dar ne vom opri la două exemple mai interesante. Mai întâi, funcţia

$$\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}, \quad \varphi(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & \text{dacă } n \text{ este număr par} \\ -\dfrac{n+1}{2}, & \text{dacă } n \text{ este impar} \end{cases}$$

este o bijecţie care ne permite să construim pe $\mathbf{N}$ o structură de grup ciclic[1]. Subgrupurile lui $\mathbf{N}$ relativ la această operaţie sunt de forma $\{2ax | x \geq 0\} \cup \{-2ax - 1 | x \leq 0\}$, unde $a \in \mathbf{N}$ (sunt cele ce corespund subgrupurilor $a\mathbf{Z}$ ale lui $\mathbf{Z}$).

Al doilea exemplu este Problema **8**, pag. 18, din [**3**]:

Fie $G = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, ..., \sqrt{1984}\}$. *Să se definească o lege de compoziţie* "$*$" *pe* G *astfel încât* $(G, *)$ *să fie grup.*

Având o mulţime cu 1984 de elemente, cel mai simplu este să definim o bijecţie între G şi grupul $\mathbf{Z}_{1984}$. Un exemplu la îndemână este $\psi : \mathbf{Z}_{1984} \to G$, $\psi(\hat{a}) = \sqrt{a+1}$, $a \in \{0, 1, ..., 1983\}$, iar operaţia care se obţine este $x * y = \sqrt{x^2 \oplus y^2}$, unde $\oplus$ este adunarea modulo 1984 pe mulţimea $\mathfrak{R}_{1984} = \{1, 2, ..., 1984\}$.

Observaţia 3. Se pot transfera nu numai structuri de grup, ci şi inele, corpuri ş.a., evident pe acelaşi principiu. De exemplu, putem defini pe $\mathbf{N}$ sau $\mathbf{Z}$ structuri de corp izomorfe cu $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$.

Observaţia 4. După cum se spunea mai sus, multe dintre structurile de grup care apar în probleme sunt "imaginile" unor structuri cunoscute şi un instrument de mare ajutor ar fi "descoperirea" operaţiilor de la care s-a plecat. În legatură cu aceasta, se poate avea în vedere găsirea unor subgrupuri ale unor grupuri cunoscute izomorfe cu alte structuri date.

De exemplu, mulţimea funcţiilor liniare $\mathcal{L}(\mathbf{R}) = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid f(x) = ax + b,\ a \neq 0\}$ este grup în raport cu operaţia de compunere. Acest grup este izomorf cu grupul multiplicativ al matricelor de forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbf{R}$.

---

[1] N.B. Deci o afirmaţie de genul "$\mathbf{N}$ nu este grup" nu îşi are rostul până când nu vom spune care este operaţia la care facem referire.

II. ***Câteva consecinţe teoretice.***

Dat un grup $(G, .)$, fără prea multă greutate se poate demonstra că pe mulţimea $O(G) = \{f_a : G \to G \mid f_a(x) = ax\}$ (mulţimea omotetiilor la stânga ale lui G), compunerea funcţiilor determină o structură de grup. Evident, aplicaţia $\varphi : G \to O(G)$, $\varphi(a) = f_a$ este un izomorfism de grupuri. Cum $O(G)$ este subgrup al grupului $S(G)$ al permutărilor mulţimii G, ceea ce am obţinut este tocmai demonstraţia unei teoreme cunoscute din teoria grupurilor:

Teorema lui Cayley. *Orice grup este izomorf cu un subgrup al unui grup de permutări.*

Enunţul prezentat la începutul acestei note ne ajută să rezolvăm problema inversă: dată o mulţime G şi cunoscând grupul $O(G)$, să se construiască structura de grup pe G de la care s-a pornit. Este suficient să considerăm o bijecţie între G şi grupul $O(G)$ (care trebuie să existe pentru ca $O(G)$ să fie grupul omotetiilor lui G), iar structura indusă care se obţine este cea căutată. Pentru orice două bijecţii, structurile găsite vor fi izomorfe, şi anume izomorfe cu $O(G)$. Avem chiar unele informaţii suplimentare:

Propoziţia 2 (**problema G.81 din** [1] **- enunţ modificat**). *Numărul structurilor de grup ce se pot defini pe o mulţime G cu n elemente, izomorfe cu o structură fixată $(H, *)$ este $\dfrac{n!}{|\text{Aut }(H, *)|}$, unde* Aut $(H, *)$ *reprezintă grupul automorfismelor grupului fixat $(H, *)$.*

Având în vedere cele două propoziţii de până acum, putem afirma nu numai că se poate construi grupul G cunoscând grupul omotetiilor sale $O(G)$, putem chiar spune câte structuri de grup se pot defini pe G:

Propoziţia 3. *Dacă G este o mulţime având n elemente, numărul structurilor de grup ce se pot defini pe mulţimea G este $\sum_{H} \dfrac{n!}{|\text{Aut } H|}$, unde H parcurge mulţimea tuturor subgrupurilor de ordin n neizomorfe ale grupului $S(G)$.*

Bibliografie

[1] **C. Năstăsescu, M. Ţena ş.a.** - *Probleme de structuri algebrice*, Ed. Acad., Bucureşti, 1988.

[2] **I. D. Ion, A. P. Ghioca, N. I. Nediţă** - *Algebră, manual pentru clasa a* **XII**-*a*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1996.

[3] *** - *Probleme de matematică date la concursurile şi examenele din 1984.*

[4] **Gh. Andrei, C. Caragea, V. Ene** - *Algebră. Culegere de probleme pentru examene de admitere şi olimpiade şcolare*, Ed. Scorpion 7, Bucureşti, 1995.