În legătură cu o problemă dată la O.B.M.

Neculai ROMAN[1]

La O.B.M. din 1999 a fost dată următoarea problemă:

Fie ABC un triunghi ascuţitunghic şi fie M, N, P picioarele perpendicularelor din centrul său de greutate G pe laturile AB, BC, CA respectiv. Să se arate că:

$$\frac{4}{27} < \frac{S[MNP]}{S[ABC]} \leq \frac{1}{4}. \tag{1}$$

Enunţul şi o soluţie a acestei probleme se poate găsi în [1]. Vom arăta că inegalitatea (1) are loc pentru o mulţime mai vastă de puncte din planul unui triunghi oarecare. În acest scop, vom utiliza următorul rezultat cunoscut:

Propoziţie. *Fie ABC un triunghi înscris în cercul $C(O,R)$, M un punct în planul triunghiului şi A', B', C' picioarele perpendicularelor din M pe dreptele BC, CA, AB respectiv. Are loc egalitatea:*

$$\frac{S[A'B'C']}{S[ABC]} = \frac{|R^2 - OM^2|}{4R^2}. \tag{2}$$

Triunghiul $A'B'C'$, ce are ca vârfuri proiecţiile punctului M pe laturile triunghiului ABC, se numeşte *triunghiul podar* asociat punctului M. În privinţa proprietăţilor triunghiurilor podare se poate consulta [2], pp. 127 – 144. Se găseşte aici formula (2) cât şi forma specială pe care o ia această egalitate atunci când M are o poziţie particulară (coincide cu G, I, O etc.).

Consecinţă. Fie ABC un triunghi înscris în cercul $C(O,R)$, M un punct interior cercului $C\left(O, \frac{R\sqrt{33}}{9}\right)$ şi A', B', C' picioarele perpendicularelor din punctul M pe dreptele BC, CA, AB respectiv. Atunci, are loc inegalitatea (1).

Demonstraţie. Utilizând (2) şi faptul că $|R^2 - OM^2| = R^2 - OM^2 \leq R^2$ (cu egalitate dacă şi numai dacă M coincide cu O), obţinem a doua inegalitate din (1). Ţinând seama de condiţia $OM < \frac{R\sqrt{33}}{9}$, deducem în acelaşi fel şi prima inegalitate.

Observaţie. Problema dată la O.B.M. poate fi rezolvată acum şi altfel. $\triangle ABC$ fiind ascuţitunghic, rezultă că H este în interiorul său, deci $OH < R$. Cum $OG = \frac{1}{3}OH$, avem $OG < \frac{R}{3} < \frac{R\sqrt{33}}{9}$ etc.

Propunem cititorului spre rezolvare următoarea problemă:

Fie ABC un triunghi înscris în cercul $C(O,R)$ de arie S şi M un punct interior cercului $C\left(O, \frac{R\sqrt{33}}{9}\right)$. Notăm cu R' raza cercului circumscris triunghiului podar $A'B'C'$ asociat punctului M. Să se arate că:

a) $\frac{4}{27}\frac{R'}{R} < \frac{A'B' \cdot B'C' \cdot C'A'}{AB \cdot BC \cdot CA} \leq \frac{1}{4}\frac{R'}{R}$, b) $\frac{32}{27}R'R^2 < MA \cdot MB \cdot MC \leq 2R'R^2$,

c) $\frac{A'B'}{AB} + \frac{B'C'}{BC} + \frac{C'A'}{CA} \geq \frac{1}{R}\sqrt{S\sqrt{3}}$.

Bibliografie

[1] **M. Becheanu** - *A 16-a O. B. M.*, G.M. 5-6/1999, 225-228.

[2] **V. Gh. Vodă** - *Triunghiul - ringul cu trei colţuri*, Ed. Albatros, Bucureşti, 1979.

[1] Profesor, Şcoala "V. Alecsandri", Mirceşti (Iaşi)