Structuri algebrice definite pe graficul unei funcţii

Gabriel POPA[1]

Într-un articol apărut în *Matematica v Şkole* (menţionat în [2]) se introduce o structură de corp pe mulţimea punctelor parabolei $y = x^2$, care se bucură de o interesantă interpretare geometrică. În [2] se extinde această construcţie pentru o parabolă oarecare $y = ax^2 + bx + c$ (v. şi problemele S30 şi G13 din [1]).

Observaţia 1. Urmând aceeaşi cale, dacă G este mulţimea punctelor graficului funcţiei $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, atunci pe G putem defini o structură de corp astfel: dacă $A(x, f(x))$, $B(y, f(y))$, considerăm

$$\begin{aligned} A \oplus B &= M, \text{ cu } M(x+y, f(x+y)); \\ A \otimes B &= N, \text{ cu } N(xy, f(xy)). \end{aligned}$$

Verificarea faptului că $(G, \oplus, \otimes)$ este corp e imediată; elementul nul este $E(0, f(0))$, iar elementul unitate este $F(1, f(1))$. Mai mult, $(G, \oplus, \otimes) \cong (\mathbf{R}, +, \cdot)$, un izomorfism fiind $\theta : G \to \mathbf{R}$, $\theta(M) = x_M$.

Observaţia 2. Dacă $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o aplicaţie bijectivă, pe $\mathbf{R}$ putem defini o nouă structura de corp prin transportul operaţiilor canonice (conform problemei G2 din [1]):

$$\begin{aligned} x * y &= \varphi^{-1}(\varphi(x) + \varphi(y)) \\ x \circ y &= \varphi^{-1}(\varphi(x)\varphi(y)) \end{aligned}$$

Noul corp $(\mathbf{R}, *, \circ)$ este izomorf cu $(\mathbf{R}, +, \cdot)$, un izomorfism fiind chiar φ.

Observaţia 3. Putem acum construi pe G, ca la Observaţia 1, operaţiile $\oplus, \otimes$; astfel, $(G, \oplus, \otimes)$ este corp, izomorf cu $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ - un izomorfism fiind $\varphi^{-1}\theta$. În acest mod, definim pe G o infinitate de structuri de corp, toate izomorfe între ele.

Exemplu. Pentru $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ şi $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\varphi(x) = x + \dfrac{b}{2a}$ se obţine extinderea din [2].

Observaţia 4. Consideraţiile de mai sus rămân valabile şi pentru funcţii $f : D \to \mathbf{R}$ cu $D \neq \mathbf{R}$ dar de puterea continuului, dat fiind faptul că atunci există o bijecţie $\varphi : D \to \mathbf{R}$.

Problema cercetată în continuare este următoarea: care sunt funcţiile pentru care structura de corp definită pe G de operaţiile $\oplus, \otimes$ beneficiază de interpretarea geometrică naturală din [1] ? Mai precis, dorim să determinăm funcţiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ pentru care oricare ar fi A, B din G, avem:

(**i**) *EM este paralelă cu AB*;

(**ii**) *intersecţia dreptelor FN şi AB este un punct de pe Oy*,

unde M, N, E, F sunt cele definite anterior.

Vom afla mai întâi funcţiile care îndeplinesc (**i**), urmând a izola apoi dintre ele pe acelea care îndeplinesc şi (**ii**).

[1] Profesor, Gr. Şc. "Ştefan Procopiu", Iaşi

Teoremă. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie analitică (adică o funcţie care admite o dezvoltare în serie de puteri) astfel încât este îndeplinită condiţia* (**i**). *Atunci f este o funcţie de gradul II: $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, cu a_0, a_1, $a_2 \in \mathbf{R}$.*

Demostraţie. Deoarece dreptele EM şi AB sunt paralele, ele trebuie să aibă aceeaşi pantă, deci:

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{f(x+y) - f(0)}{x+y}.$$

Pentru $x \neq 0$, facem $y \to x$ şi ţinând seama de faptul că f este continuă şi derivabilă, obţinem:

$$\lim_{y \to x} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \lim_{y \to x} \frac{f(x+y) - f(0)}{x+y} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{f(2x) - f(0)}{2x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2xf'(x) = f(2x) - f(0) \Leftrightarrow 2x[f(x) - f(0)]' = f(2x) - f(0)$$

formulă care se verifică şi pentru $x = 0$.

Notând $g(x) = f(x) - f(0)$, obţinem că g este soluţie a ecuaţiei funcţionale:

$$2xg'(x) = g(2x). \qquad (*)$$

Evident că g este analitică, deci putem considera dezvoltarea în serie de puteri a funcţiei g:

$$g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + ...$$

Prin derivare şi înlocuire în ecuaţie, se obţine:

$$2a_1x + 4a_2x^2 + 6a_3x^3 + ... + 2na_nx^n + ... = a_0 + 2a_1x + 2^2a_2x^2 + ... + 2^na_nx^n + ...$$

şi atunci în mod necesar $a_0 = 0$, $a_n = 0, \forall n \geq 3$. Rezultă că $g(x) = a_1x + a_2x^2$, cu a_1, a_2 arbitrar aleşi. Notând $a_1 = b$, $a_2 = a$, $f(0) = c$, urmează că $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Se verifică acum cu uşurinţă că dintre funcţiile de gradul II, singurele care verifică (**ii**) se obţin pentru $b = c = 0$. Înlocuind însă (**ii**) cu:

(**ii**$'$) *intersecţia dreptelor FN şi AB este un punct de pe axa de simetrie,* atunci putem păstra toate funcţiile de gradul II, după cum se arată în [**2**].

Problemă deschisă. Putem rezolva ecuaţia (*) în ipoteze mai slabe decât cea de analiticitate impusă lui f?

Bibliografie

[1] **C. Năstăsescu, M. Ţena, Gh. Andrei, I. Otărăşanu** - *Probleme de structuri algebrice*, Ed. Academiei, Bucureşti, 1988.

[2] **Maria S. Pop** - *Structuri algebrice definite pe mulţimea punctelor unei parabole*, G.M. 8 / 1985.