Un exemplu de funcţie continuă şi nicăieri derivabilă

Mihai NECULA[1]

Vom prezenta o demonstraţie elementară, bazată pe interpretarea geometrică a noţiunii de derivată, pentru un exemplu de funcţie continuă şi nederivabilă în fiecare punct al axei reale.

Primul exemplu de acest tip a fost dat de K. Weierstrass în anul 1875 şi, având o demonstraţie laborioasă (vezi [**2**], pag. 360 - 362), a fost urmat de alte exemple mai simple. Cel pe care îl prezentăm aici este o modificare a exemplului lui van der Waerden (vezi [**3**], pag. 283 - 285) şi a fost demonstrat de G. de Rham în 1957 (vezi [**2**], pag. 353 - 355) pe o cale oarecum diferită de cea pe care o propunem mai jos.

Începem prin a defini pe intervalul $[0,2)$ funcţia

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{pentru } x\in[0,1)\\ 2-x, & \text{pentru } x\in[1,2),\end{cases} \tag{1}$$

pe care o prelungim apoi prin periodicitate pe $\mathbf{R}$, astfel încât $f(x+2)=f(x)$, $\forall x\in\mathbf{R}$. Definim funcţiile $f_n:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $\forall n\in\mathbf{N}$, prin:

$$f_n(x)=2^{-n}f(2^nx),\ \forall x\in\mathbf{R}, \tag{2}$$

şi cu ajutorul acestora definim funcţiile $s_n:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $n\in\mathbf{N}$, prin:

$$s_n(x)=f_0(x)+f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x),\ \forall x\in\mathbf{R}, \tag{3}$$

adică

$$s_n(x)=f_0(x)+\frac{1}{2}f(2x)+\frac{1}{4}f(4x)+...+\frac{1}{2^n}f(2^nx),\ \forall x\in\mathbf{R}.$$

În sfârşit, funcţia căutată F o definim astfel:

$$F(x)=\lim_{n\to\infty}s_n(x) \tag{4}$$

pentru acele puncte x din $\mathbf{R}$ pentru care şirul $(s_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ este convergent.

Problema 1. a) *Reprezentaţi grafic funcţiile* s_0, s_1, s_2 *şi* s_3.

b) *Arătaţi că fiecare funcţie* s_n, $n\in\mathbf{N}$, *este continuă pe* $\mathbf{R}$ *şi derivabilă pe orice interval de forma* $(2^{-n}k,2^{-n}(k+1))$, *cu* $k\in\mathbf{Z}$, *având derivata constantă pe un astfel de interval.*

Rezolvare. a) În figura 1 sunt reprezentate graficele funcţiilor f_0,..., f_4 şi s_0, ..., s_4 restrânse la intervalul $[0,2]$. Graficul punctat este al funcţiei s_{10} şi sugerează graficul lui F.

b) Fixăm un $n\in\mathbf{N}$. Continuitatea funcţiei s_n rezultă din continuitatea pe $\mathbf{R}$ a funcţiei f. Pe intervale de forma $(k,k+1)$, $k\in\mathbf{Z}$, funcţia f este derivabilă şi

$$f'(x)=\begin{cases} +1 & \text{pentru } x\in(2k,2k+1)\,;\\ -1 & \text{pentru } x\in(2k+1,2k+2)\,,\end{cases}\quad,\ k\in\mathbf{Z}.$$

Deoarece pentru $\forall m\in\mathbf{N}$ şi $\forall k\in\mathbf{Z}$ în intervalul $(2^{-m}k,2^{-m}(k+1))$ nu se află nici un număr întreg, rezultă, ţinând cont de (3), că s_n este derivabilă pe $(2^{-n}k,2^{-n}(k+1))$ pentru orice $k\in\mathbf{Z}$.

Să observăm, în figura 1, următoarele două fenomene de stabilizare şi de intercalare: graficele funcţiilor $s_0,...,s_3$ sunt linii poligonale, după cum urmează:

---

[1] Lector, Facultatea de Matematică, Univ. "Al. I. Cuza", Iaşi

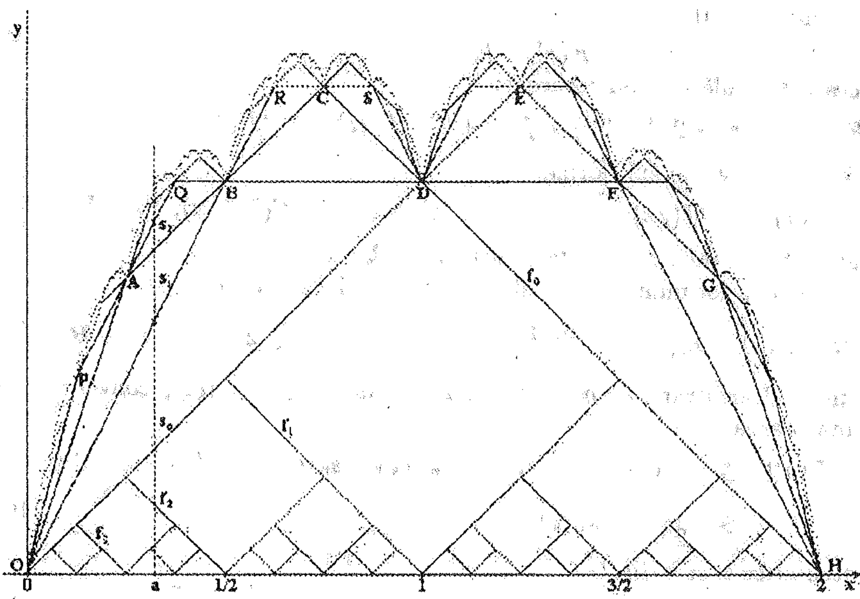

Figura 1.

$s_0 : O..................D.....................H$
$s_1 : O.........B.........D.........F.........H$
$s_2 : O...A...B..C...D...E....F...G...H$
$s_3 : OPAQBRCSD.......................H$

La trecerea de la s_2 la s_3, de exemplu, toate vârfurile lui s_2 sunt şi vârfuri ale lui s_3 (fenomenul de stabilizare), iar pe linia poligonală corespunzătoare lui s_3, ele apar din doi în doi (fenomenul de intercalare).

Aceste două proprietăţi ne vor permite să demonstrăm că funcţia F nu este derivabilă, dar până atunci să arătăm că F este definită pe $\mathbf{R}$ şi este continuă.

Problema 2. *Arătaţi că funcţia F este definită pe întreaga axă reală, este mărginită şi satisface următoarea formulă a restului:*

$$\forall n \in \mathbf{N},\ F(x) - s_n(x) = 2^{-(n+1)}F(2^{n+1}x),\ \forall x \in \mathbf{R}. \tag{5}$$

Rezolvare. Fixăm în mod arbitrar $x = a$ în $\mathbf{R}$. Deoarece $0 \leq f(a) \leq 1$, din $s_{n+1}(a) = s_n(a) + 2^{-(n+1)}f(2^{n+1}a) \geq s_n(a)$, $\forall n \in \mathbf{N}$, rezultă că şirul $(s_n(a))$ este crescător, iar din (3) rezultă că este mărginit:

$$0 \leq s_n(a) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^n} \leq 2,\ \forall n \in \mathbf{N}. \tag{6}$$

Deci $(s_n(a))$ este convergent, iar funcţia F este definită în $x = a$.

Mărginirea lui F rezultă din (6), făcând $n \to \infty$. Obţinem:

$$0 \leq F(x) \leq 2,\ \forall x \in \mathbf{R}. \tag{7}$$

Din (3) rezultă că, pentru fiecare $x \in \mathbf{R}$,

$$s_{n+1}(x) = f(x) + \frac{1}{2}\left[f(2x) + \frac{1}{2}f(2\cdot 2x) + ... + \frac{1}{2^n}f(2^n\cdot 2x)\right],$$

adică $s_{n+1}(x) = f(x) + \frac{1}{2}s_n(2x)$, $\forall n \in \mathbf{N}$, şi trecând la limită cu $n \to \infty$, obţinem formula (5) pentru $n = 0$:

$$\forall x \in \mathbf{R},\ F(x) = f(x) + 2^{-1}F(2x). \tag{8}$$

Utilizând acestă formulă în mod recurent:

$$F(x) = f(x) + 2^{-1}F(2x) = f(x) + 2^{-1}[f(2x) + 2^{-1}F(4x)] = \dots$$

şi obţinem formula restului sub forma:

$$F(x) = f(x) + 2^{-1}f(2x) + \dots + 2^{-n}f(2^n x) + 2^{-(n+1)}F(2^{n+1}x),\ \forall x \in \mathbf{R}.$$

Problema 3. *Arătaţi că F este continuă pe* $\mathbf{R}$.

Rezolvare. Din formula restului şi mărginirea lui F rezultă că

$$\forall n \in \mathbf{N},\ 0 \le F(x) - s_n(x) = 2^{-(n+1)}F(2^{n+1}x) \le 2^{-(n+1)} \cdot 2 = \frac{1}{2^n},\ \forall x \in \mathbf{R}. \tag{9}$$

Fixăm în mod arbitrar $x = a$ în $\mathbf{R}$ şi considerăm un şir $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ convergent la a. Folosim majorarea:

$$\begin{aligned}|F(x_k) - F(a)| &\le |F(x_k) - s_n(x_k)| + |s_n(x_k) - s_n(a)| + |s_n(a) - F(a)| \le \\ &\le \frac{1}{2^n} + |s_n(x_k) - s_n(a)| + \frac{1}{2^n}\end{aligned} \tag{10}$$

valabilă pentru orice n şi k din $\mathbf{N}$.

Considerăm un $\varepsilon > 0$. Fixăm un $n \in \mathbf{N}$ astfel încât $\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{3}$ (este posibil). Deoarece funcţia s_n este continuă în $x = a$, rezultă că $s_n(x_k) \longrightarrow s_n(a)$ pentru $k \longrightarrow \infty$ şi deci există un $k(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ astfel încât $|s_n(x_k) - s_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$ pentru $k \ge k(\varepsilon)$.

Din (10) urmează că:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists k(\varepsilon) \in \mathbf{N} \text{ astfel încât } k \ge k(\varepsilon) \Rightarrow |F(x_k) - F(a)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

adică $\lim\limits_{k\to\infty} F(x_k) = F(a)$. Deci F este continuă în orice punct $a \in \mathbf{R}$.

Am ajuns la problema principală: să arătăm că F nu este derivabilă în nici un punct din $\mathbf{R}$. În acest scop vom analiza graficele funcţiilor s_n, pe care le vom nota în continuare cu $\mathcal{G}_n$:

$$\mathcal{G}_n = \{P(x,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \ \text{ pentru care } y = s_n(x)\}.$$

Din Problema 1.b rezultă că fiecare $\mathcal{G}_n$ este o linie poligonală. Vom numi vârfuri ale lui $\mathcal{G}_n$ toate punctele $P_{n,k}(x_{n,k}, y_{n,k})$ pentru care $x_{n,k} = 2^{-n}k$, $y_{n,k} = s_n(x_{n,k})$ şi $k \in \mathbf{Z}$. Vom nota cu $\mathcal{V}_n$ mulţimea vârfurilor lui $\mathcal{G}_n$:

$$\mathcal{V}_n = \left\{P_{n,k}(x_{n,k}, y_{n,k}) \in \mathcal{G}_n \text{ pentru care } x_{n,k} = 2^{-n}k,\ k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

Abscisele vârfurilor lui $\mathcal{G}_n$ vor fi numite noduri de rang n. Ele formează o diviziune $\mathcal{D}_n$ a axei reale în intervale de lungime $\frac{1}{2^n}$. Deci:

$$\mathcal{D}_n = \left\{x_{n,k} \in \mathbf{R} \ \text{ pentru care } x_{n,k} = 2^{-n}k,\ k \in \mathbf{Z}\right\} \quad \text{şi} \quad \mathbf{R} = \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} [x_{n,k}; x_{n,k+1}).$$

Următoarele relaţii evidente:

$$x_{n,k} = x_{n+1,2k} < x_{n+1,2k+1} = \frac{x_{n,k} + x_{n,k+1}}{2} < x_{n+1,2k+2} = x_{n,k+1}, \tag{11}$$

valabile pentru orice n şi k din $\mathbf{N}$, arată că fenomenele de stabilizare şi de intercalare, observate în figura 1 pentru vârfurile din $\mathcal{V}_0, \ldots, \mathcal{V}_4$, operează în primul rând la nivelul nodurilor:

$$\forall n \in \mathbf{N}, \mathcal{D}_n \subset \mathcal{D}_{n+1} \quad \text{(stabilizare)} \quad \text{şi}$$
$$\forall n \in \mathbf{N},\ \forall k \in \mathbf{Z},\ [x_{n,k}; x_{n,k+1}) = [x_{n+1,2k}; x_{n+1,2k+1}) \cup [x_{n+1,2k+1}; x_{n+1,2k+2}) \quad (12)$$

(intercalare) .

Graficul restricţiei lui s_n la $[x_{n,k}; x_{n,k+1})$ este segmentul $[P_{n,k}P_{n,k+1})$ din planul $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ şi va fi numit latură a lui $\mathcal{G}_n$. În concluzie:

$$\mathcal{G}_n = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} [P_{n,k}P_{n,k+1}),\ \forall n \in \mathbf{N}. \quad (13)$$

Urmează acum să demonstrăm cele două fenomene observate în figura 1 şi să stabilim consecinţele lor:

Problema 4. *Notăm cu $\mathcal{G}_F$ graficul funcţiei F. Arătaţi că:*

a) $\forall n \in \mathbf{N}$, $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{V}_{n+1}$ *şi că,* $\forall n \in \mathbf{N}$, $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{G}_F$;

b) *Dacă $[AB)$ este o latură a lui $\mathcal{G}_n$ atunci există în mod unic $Q \in \mathcal{V}_{n+1}$ astfel încât $[AQ)$ şi $[QB)$ să fie laturi ale lui $\mathcal{G}_{n+1}$. Mai mult, în acest caz, între pantele m_{AB}, m_{AQ} şi m_{QB} ale acestor segmente au loc relaţiile:*

$$m_{AQ} = m_{AB} + 1 \quad \text{şi} \quad m_{QB} = m_{AB} - 1. \quad (14)$$

Rezolvare. a) Fie $P_{n,k}(x_{n,k}, y_{n,k}) \in \mathcal{V}_n$. Din (11) rezultă că $x_{n,k} = x_{n+1,2k} \in \mathcal{D}_{n+1}$, iar din (3) rezultă că

$$\begin{aligned} s_{n+1}(x_{n,k}) &= s_n(x_{n,k}) + 2^{-(n+1)} f(2^{n+1} x_{n,k}) = \\ &= s_n(x_{n,k}) + 2^{-(n+1)} f(2k) = s_n(x_{n,k}) \end{aligned}$$

deoarece $k \in \mathbf{Z}$ implică $f(2k) = 0$. Deci, $P_{n,k} = P_{n+1,2k} \in \mathcal{V}_{n+1}$.

Urmează, prin recurenţă, că $P_{n,k} \in \mathcal{V}_{n+p}$, $\forall p \in \mathbf{N}$ şi deci

$$s_{n+p}(x_{n,k}) = s_n(x_{n,k}),\ \forall p \in \mathbf{N},$$

de unde, trecând la limită cu $p \to \infty$, obţinem că $F(x_{n,k}) = s_n(x_{n,k})$ adică $P_{n,k} \in \mathcal{G}_F$.

b) Fie $[AB) = [P_{n,k}P_{n,k+1})$ o latură a lui $\mathcal{G}_n$. Ştim deja că $x_A = x_{n,k}$ şi $x_B = x_{n,k+1}$ sunt noduri de rang $n+1$, iar A şi B sunt vârfuri şi pentru $\mathcal{G}_{n+1}$. Singurul nod din $\mathcal{D}_{n+1}$ aflat între x_A şi x_B este $x_{n+1,2k+1}$ (din (11)) şi deci punctul căutat, Q, este punctul de coordonate $x_Q = x_{n+1,2k+1}$ şi $y_Q = s_{n+1}(x_Q)$.

Deoarece x_A şi x_Q sunt noduri consecutive în $\mathcal{D}_{n+1}$, pe intervalul $(x_A; x_Q)$ funcţiile s_{n+1}, s_n şi f_{n+1} sunt derivabile, având derivatele constante, egale cu pantele segmentelor corespunzătoare fiecărui grafic. Derivând egalitatea

$$s_{n+1}(x) = s_n(x) + 2^{-(n+1)} f(2^{n+1}x),\ \forall x \in (x_A; x_Q)$$

obţinem

$$s'_{n+1}(x) = s'_n(x) + f'(2^{n+1}x),\ \forall x \in (x_A; x_Q).$$

Dar $x \in (x_A; x_Q)$ implică $2^{n+1}x \in (2k; 2k+1)$ şi deci $f'(2^{n+1}x) = +1$. Am demonstrat deci egalitatea:

$$m_{AQ} = m_{AB} + 1$$

şi este evident că egalitatea $m_{QB} = m_{AB} - 1$ se obţine în mod analog.

Se prefigurează deja motivul pentru care funcţia F este nederivabilă în orice punct din $\mathbf{R}$: toate vârfurile liniilor poligonale $\mathcal{G}_n$ aparţin graficului funcţiei F şi deci toate laturile acestora sunt coarde pentru $\mathcal{G}_F$.

Pentru $x_0 = a$ fixat arbitrar formăm şirul laturilor care intersectează verticala prin a. În exemplul ilustrat în figura 1, obţinem şirul

$$[OD),\ [OB),\ [AB),\ [AQ),\ \ldots$$

Pantele acestor segmente se modifică cu $+1$ sau cu -1 când trecem de la $\mathcal{G}_n$ la $\mathcal{G}_{n+1}$ şi deci formează un şir divergent.

Deoarece abscisele capetelor acestor coarde ale graficului $\mathcal{G}_F$ formează două şiruri convergente la $x_0 = a$, şirul pantelor ar trebui să fie convergent la derivata lui F în $x_0 = a$, dacă F ar fi derivabilă în x_0. Contradicţie!

Să demonstrăm acest rezultat auxiliar:

Propoziţia 5. *Fie* $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcţie derivabilă într-un punct* $x_0 \in \mathbf{R}$. *Arătaţi că, dacă* $a_n < x_0 < b_n, \forall n \in \mathbf{N}$, *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$ *atunci*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(b_n) - F(a_n)}{b_n - a_n} = F'(x_0). \qquad (15)$$

Rezolvare. Notăm $d_n = (b_n - x_0)/(b_n - a_n)$ şi deci $0 < d_n < 1, \forall n \in \mathbf{N}$. Relaţia (15) se obţine din egalitatea

$$\frac{F(b_n) - F(a_n)}{b_n - a_n} - F'(x_0) = d_n \left[\frac{F(b_n) - F(x_0)}{b_n - x_0} - F'(x_0)\right] + (1-d_n)\left[\frac{F(a_n) - F(x_0)}{a_n - x_0} - F'(x_0)\right]$$

deoarece şirurile din cele două paranteze pătrate au limita zero, iar (d_n) şi $(1 - d_n)$ sunt şiruri mărginite.

Revenind la funcţia F dată de exemplu, suntem acum în măsură să rezolvăm problema de fond:

Problema 6. *Arătaţi că funcţia* F *este nederivabilă în fiecare punct al axei reale.*

Rezolvare. Presupunem, prin reducere la absurd, că există un punct $x_0 \in \mathbf{R}$ în care F este derivabilă. Urmând calea către contradicţia anunţată, construim şirul de segmente $[A_nB_n)$, $n \in \mathbf{N}$, după cum urmează:

Pentru fiecare $n \in \mathbf{N}$, notăm cu X_n^0 punctul lui $\mathcal{G}_n$ de coordonate $x = x_0$ şi $y = s_n(x_0)$. Din relaţia (13) rezultă că X_n^0 se află pe o anumită latură a lui $\mathcal{G}_n$, pe care o notăm cu $[A_nB_n)$.

Să analizăm acum acest şir de laturi. Ţinând cont de definiţiile date noţiunilor de vârf, nod şi latură, rezultă că, pentru fiecare $n \in \mathbf{N}$, A_n şi B_n aparţin lui $\mathcal{V}_n$, iar abscisele lor, a_n şi respectiv b_n, sunt singurele două noduri din $\mathcal{D}_n$ pentru care $a_n \le x_0 < b_n$ şi $b_n - a_n = \dfrac{1}{2^n}$.

Notăm cu m_n panta segmentului $[A_nB_n)$. Conform Problemei 4.a, $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{G}_F$ şi deci segmentul $[A_nB_n]$ este o coardă pentru graficul lui F, de unde rezultă că

$$m_n = m_{A_nB_n} = \frac{F(b_n) - F(a_n)}{b_n - a_n}. \qquad (16)$$

Pentru un $n \in \mathbf{N}$, fixat arbitrar, notăm $q_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ şi considerăm punctul Q_n, din $\mathcal{G}_{n+1}$, de coordonate $x = q_n$, $y = s_{n+1}(q_n)$. Din (11) rezultă că $q_n \in \mathcal{D}_{n+1}$ şi deci $Q_n \in \mathcal{V}_{n+1}$, iar din Problema 4.b rezultă că $[A_nQ_n)$ şi $[Q_nB_n)$ sunt laturi consecutive ale lui $\mathcal{G}_{n+1}$.

Deoarece $x_0 \in [a_n, b_n) = [a_n, q_n) \cup [q_n, b_n)$, sunt posibile numai următoarele două situaţii:

Cazul 1. $x_0 \in [a_n, q_n)$. În acest caz, $X^0_{n+1} \in [A_nQ_n)$, deoarece a_n şi q_n sunt noduri consecutive în $\mathcal{D}_{n+1}$. Rezultă că $[A_{n+1}B_{n+1}) = [A_nQ_n)$ şi deci $m_{n+1} = m_n + 1$ (conform Problemei 4.b).

Cazul 2. $x_0 \in [q_n, b_n)$. În acest caz, $X^0_{n+1} \in [Q_nB_n)$, deoarece q_n şi b_n sunt noduri consecutive în $\mathcal{D}_{n+1}$. Rezultă că $[A_{n+1}B_{n+1}) = [Q_nB_n)$ şi deci $m_{n+1} = m_n - 1$.

Am arătat astfel că:

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad |m_{n+1} - m_n| = 1. \tag{17}$$

Vom obţine contradicţia căutată demonstrând că şirul (m_n) este convergent. Sunt posibile numai două situaţii: x_0 este nod sau nu.

Cazul 1. Dacă există un $p \in \mathbf{N}$ astfel încât $x_0 \in \mathcal{D}_p$ atunci din relaţiile (12) rezultă că $x_0 \in \mathcal{D}_n$ şi deci $X^0_n \in \mathcal{V}_n$ pentru orice $n \geq p$. Urmează că $A_n = X^0_n$ şi $a_n = x_0$ pentru $n \geq p$, iar

$$\lim_{n\to\infty} m_n = \lim_{n\to\infty} \frac{F(b_n) - F(a_n)}{b_n - a_n} = F'(x_0).$$

Cazul 2. Dacă pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $x_0 \notin \mathcal{D}_n$ atunci $a_n < x_0 < b_n$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$ şi din Problema 5 rezultă că şirul (m_n) tinde la $F'(x_0)$ pentru $n \to \infty$.

Am stabilit faptul că (m_n) este un şir convergent, de unde rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} |m_{n+1} - m_n| = 0$, în contradicţie cu relaţia (17).

Concluzie: nu există nici un punct $x_0 \in \mathbf{R}$ în care F să fie derivabilă.

Observaţie. Deoarece toate funcţiile s_n, $n \in \mathbf{N}$, admit derivate laterale finite în orice punct din $\mathbf{R}$, şirul "*bucluca*ş" (m_n) este de fapt şirul valorilor derivatelor la dreapta ale funcţiilor s_n, calculate în x_0.

În final, scopul propus fiind atins, urmează o recreaţie matematică:

Problema 7. *Omotetia de centru O şi raport $\frac{1}{4}$, urmată de translaţia de vector $\overrightarrow{OB}$, transformă trapezul $OBFH$ în trapezul $BRSD$, după cum observăm în figura 1. Arătaţi că această transformare geometrică suprapune graficul lui F dintre punctele O şi H peste porţiunea sa dintre punctele B şi D.*

Este graficul lui F un fractal?

Rezolvare. Interpretaţi geometric formula restului. Succes!

Bibliografie

[1] **B.B. Mandelbrot,** *Fractals,* W. H. Freeman and Comp., San Francisco, 1977.

[2] **M. Nicolescu,** *Analiză matematică,* vol. II, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1958.

[3] **A. Precupanu,** *Bazele analizei matematice,* Ediţia a III-a, Ed. Polirom, Iaşi, 1998.