Observaţii privind formulele de calcul aproximativ al integralei Riemann

Edgar KERN[1] *şi Florin POPOVICI*[2]

În această notă prezentăm o tehnică unitară şi simplă pe baza căreia obţinem formule de calcul aproximativ al integralei Riemann pentru funcţii de clasă C^1 şi C^2.

Fie $a, b \in \mathbf{R}$, cu $a < b$. Fie $C[a,b]$ mulţimea funcţiilor continue pe $[a,b]$. Pentru orice $k \in \mathbf{N}$, fie $C^k[a,b] = \{f \in C[a,b] \mid f^{(k)} \in C[a,b]\}$, cu convenţia $f^{(0)} = f$.

Fie $f \in C[a,b]$. Notăm $M(f) = \max\{|f(x)| \mid x \in [a,b]\}$. Pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, fie diviziunea cu $n+1$ puncte echidistante $\Delta_n \in \mathfrak{Div}[a,b]$, $\Delta_n = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$, adică $x_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Considerăm sumele integrale Riemann

$$D_n^s(f) = \sigma_{\Delta_n}(f,(x_{i-1})) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}),$$

$$D_n^d(f) = \sigma_{\Delta_n}(f,(x_i)) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i),$$

$$D_n^m(f) = \sigma_{\Delta_n}\left(f,\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)(x_i - x_{i-1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)$$

şi suma

$$T_n(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}(x_i - x_{i-1}) = \frac{b-a}{2n}\sum_{i=1}^{n} \left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right).$$

Observaţie. Avem

$$T_n(f) = \frac{1}{2}\left(D_n^s(f) + D_n^d(f)\right).$$

Teorema 1 (metoda dreptunghiurilor). *Dacă $f \in C[a,b]$, atunci avem:*

$$(1)\quad \left|\int_a^b f(x)dx - D_n^s(f)\right| \le 2M(f)(b-a), \qquad (2)\quad \left|\int_a^b f(x)dx - D_n^d(f)\right| \le 2M(f)(b-a),$$

$$(3)\quad \left|\int_a^b f(x)dx - D_n^m(f)\right| \le 2M(f)(b-a).$$

Demonstraţie. Avem

$$\left|\int_a^b f(x)dx - D_n^s(f)\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx + \sum_{i=1}^{n} |f(x_{i-1})|\,(x_i - x_{i-1}) \le 2M(f)(b-a),$$

deci are loc (1). În mod analog se obţin (2) şi (3).

---

[1] Drd., Universitatea Iowa (SUA)
[2] Profesor, Liceul "N. Titulescu", Braşov

Teorema 2 (**metoda trapezelor**). *Dacă $f \in C[a,b]$, atunci avem*

$$\left|\int_a^b f(x)dx - T_n(f)\right| \le 2M(f)(b-a). \tag{4}$$

Demonstraţie. Aplicăm observaţia de mai sus şi Teorema 1.

Observaţie. Formulele (1) - (4) nu permit calculul aproximativ al integralei cu o eroare prescrisă. În ipoteze suplimentare de regularitate asupra funcţiei f, eroarea devine controlabilă prin intermediul formulelor pe care le stabilim în continuare.

Lema 1. *Dacă $f \in C^1[a,b]$, atunci pentru orice $\alpha, \beta \in [a,b]$ cu $\alpha < \beta$, avem*

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = f(\alpha)(\beta-\alpha) - \int_\alpha^\beta f'(x)(x-\beta)dx, \tag{5}$$

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = f(\beta)(\beta-\alpha) - \int_\alpha^\beta f'(x)(x-\alpha)dx. \tag{6}$$

Demonstraţie. Rezultă imediat integrând prin părţi.

Teorema 3. *Dacă $f \in C^1[a,b]$, atunci avem:*

$$\text{(7)}\quad \left|\int_a^b f(x)dx - D_n^s(f)\right| \le \frac{M(f')}{2n}(b-a)^2, \qquad \text{(8)}\quad \left|\int_a^b f(x)dx - D_n^d(f)\right| \le \frac{M(f')}{2n}(b-a)^2,$$

$$\text{(9)}\quad \left|\int_a^b f(x)dx - D_n^m(f)\right| \le \frac{M(f')}{4n}(b-a)^2.$$

Demonstraţie. Din (5) obţinem:

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx - f(\alpha)(\beta-\alpha)\right| = \left|\int_\alpha^\beta f'(x)(x-\beta)dx\right| \le M(f')\int_\alpha^\beta (\beta-x)dx = \frac{M(f')}{2}(\beta-\alpha)^2,$$

deci

$$\left|\int_a^b f(x)dx - D_n^s(f)\right| \le \sum_{i=1}^n \left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})\right| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^n \frac{M(f')}{2}(x_i - x_{i-1})^2 = \frac{M(f')}{2n}(b-a)^2,$$

adică are loc (7). În mod analog se arată că are loc (8).

Aplicând Lema 1 restricţiilor $f\,|_{[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}]}$ şi $f\,|_{[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta]}$, obţinem

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^\beta f(x)dx = f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)(\beta-\alpha) - \int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f'(x)(x-\alpha)dx -$$

$$- \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^\beta f'(x)(x-\beta)dx.$$

Rezultă că avem

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx - f(\frac{\alpha+\beta}{2})(\beta-\alpha)\right| \le M(f')[\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} (x-\alpha)dx + \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^\beta (\beta-x)dx] = \frac{M(f')}{4}(\beta-\alpha)^2.$$

Urmează că are loc (9), deoarece

$$\left|\int_a^b f(x)dx - D_n^m(f)\right| \le \sum_{i=1}^n \frac{M(f')}{4}(x_i - x_{i-1})^2 = \frac{M(f')}{4n}(b-a)^2.$$

Teorema 4. *Dacă $f \in C^1[a,b]$, atunci avem*

$$\left|\int_a^b f(x)dx - T_n(f)\right| \le \frac{M(f')}{4n}(b-a)^2. \tag{10}$$

Demonstraţie. Integrând prin părţi sau utilizând (5) sau (6), obţinem:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta-\alpha) - \int_\alpha^\beta f'(x)\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)dx.$$

Se obţine (10), căci

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx - \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta-\alpha)\right| \le M(f')\int_\alpha^\beta \left|x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right| dx = \frac{M(f')}{4}(\beta-\alpha)^2.$$

Integrând prin părţi succesiv de două ori, se obţine

Lema 2. *Dacă $f \in C^2[a,b]$, atunci pentru orice $\alpha, \beta \in [a,b]$, cu $\alpha < \beta$ avem*

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = f(\alpha)(\beta-\alpha) + \frac{1}{2}f'(\alpha)(\beta-\alpha)^2 + \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f''(x)(x-\beta)^2dx\ , \tag{11}$$

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = f(\beta)(\beta-\alpha) - \frac{1}{2}f'(\beta)(\beta-\alpha)^2 + \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f''(x)(x-\alpha)^2dx\ . \tag{12}$$

Teorema 5. *Dacă $f \in C^2[a,b]$, atunci avem*

$$\left|\int_a^b f(x)dx - D_n^m(f)\right| \le \frac{M(f'')}{24n^2}(b-a)^3\ . \tag{13}$$

Demonstraţie. Din (11) şi (12) obţinem

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^\beta f(x)dx =$$

$$= f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)(\beta-\alpha) + \frac{1}{2}\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f''(x)(x-\alpha)^2dx + \frac{1}{2}\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^\beta f''(x)(x-\beta)^2dx.$$

Rezultă că

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)(\beta-\alpha)\right| \le$$

$$\le \frac{M(f'')}{2}\left(\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} (x-\alpha)^2 dx + \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} (x-\beta)^2 dx\right) = \frac{M(f'')}{24}(\beta-\alpha)^3 .$$

De aici se obţine (13).

Observaţie. Din (13) rezultă că dacă f este funcţie de gradul întâi, atunci

$$\int_a^b f(x)dx = D_n^m(f).$$

Evident, formule de tipul formulei (13) nu pot avea loc pentru $D_n^s(f)$ şi $D_n^d(f)$.

Integrând prin părţi succesiv de două ori, vom obţine

Lema 3. *Dacă $f \in C^2[a,b]$, atunci pentru orice α, $\beta \in [a,b]$, cu $\alpha < \beta$, avem*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta-\alpha) + \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f''(x)(x-\alpha)(x-\beta)dx . \qquad (14)$$

Teorema 6. *Dacă $f \in C^2[a,b]$, atunci avem*

$$\left|\int_{\beta}^{b} f(x)dx - T_n(f)\right| \le \frac{M(f'')}{12n^2}(b-a)^3 . \qquad (15)$$

Demonstraţie. Din (14) obţinem

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx - \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta-\alpha)\right| \le \frac{M(f'')}{2}\int_{\alpha}^{\beta} |(x-\alpha)(x-\beta)|\, dx = \frac{M(f'')}{12}(\beta-\alpha)^3 .$$

De aici se obţine (15).

Observaţie. Teorema 6 poate fi demonstrată şi pe baza Lemei 2.

Teorema 7. *Dacă $f \in C^2[a,b]$, atunci avem*

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \frac{1}{2}\left(D_n^m(f) + T_n(f)\right)\right| \le \frac{M(f'')}{48n^2}(b-a)^3 . \qquad (16)$$

Demonstraţie. Avem

$$\frac{1}{2}\left(D_n^m(f)+T_n(f)\right) = \frac{1}{2}[\sum_{i=1}^{n} f(\frac{x_{i-1}+x_i}{2})(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}(x_i - x_{i-1})] =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_{i-1}) + f(\frac{x_{i-1}+x_i}{2})\right)(\frac{x_{i-1}+x_i}{2} - x_{i-1}) +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2} + f(x_i)\right)(x_i - \frac{x_{i-1}+x_i}{2}) = T_{2n}(f)$$

Conform Teoremei 6 rezultă că are loc (16).