Aplicaţii ale numerelor complexe în geometrie

Doina GRĂDINARU şi Lucian-Georges LĂDUNCĂ[1]

Se constată o creştere a numărului de probleme date la concursurile şcolare a căror rezolvare necesită utilizarea numerelor complexe. Pe această linie, vom da mai jos câteva aplicaţii. Pentru a uşura prezentarea acestora, dăm în prealabil un număr minim de rezultate din geometria analitică în complex (vezi [**3**] pentru informaţii mai ample); în principiu, aceste rezultate se obţin din cele cunoscute pentru cazul real prin trecerea de la variabilele x şi y la variabila complexă $z = x + iy$ cu ajutorul formulelor $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ şi $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$:

1. ecuaţia generală a dreptei este $\alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + c = 0$, $\alpha \in \mathbf{C}$ şi $c \in \mathbf{R}$. (derivă din $ax + by + c = 0$ dacă notăm $\alpha = \frac{1}{2}(a - ib)$);

2. ecuaţia dreptei determinate de două puncte de afixe z_1 şi z_2 este

$$z - z_1 = \frac{z_2 - z_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}(\bar{z} - \bar{z}_1) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

3. dreptele $\alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + c = 0$ şi $\beta z + \bar{\beta}\bar{z} + d = 0$ sunt paralele $\Leftrightarrow \frac{\alpha}{\bar{\alpha}} = \frac{\beta}{\bar{\beta}}$;

4. un punct $P(z_P)$ se află pe dreapta determinată de două puncte de afixe z_1 şi z_2 dacă $\exists t \in \mathbf{R}$ astfel încât $z_P = (1 - t) z_1 + t z_2$;

5. simetricul punctului $M(z_0)$ faţă de dreapta $\alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + c = 0$ este punctul M' de afix $z_0' = -\frac{\bar{\alpha}\bar{z}_0 + c}{\alpha}$, iar faţă de dreapta determinată de două puncte de afixe z_1 şi z_2 este punctul M' de afix $z_0' = \frac{z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 + \bar{z}_0(z_2 - z_1)}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}$;

6. afixele punctelor remarcabile ale unui triunghi ABC (în ipoteza că originea este luată în centrul cercului circumscris acestuia) sunt:

$$z_H = z_A + z_B + z_C, \quad z_G = \frac{1}{3}(z_A + z_B + z_C),$$

$$z_\Omega = \frac{1}{2}(z_A + z_B + z_C), \quad z_I = \frac{a z_A + b z_B + c z_C}{a + b + c}.$$

În următoarele două exemple se va vedea că unele probleme de geometrie relativ complicate au o rezolvare simplă cu ajutorul numerelor complexe.

Exemplul 1. *Se consideră pentagonul inscriptibil $ABCDE$. Notăm cu H_1, H_2, H_3, H_4, H_5 ortocentrele triunghiurilor ABC, BCD, CDE, DEA, EAB şi cu M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 mijloacele laturilor DE, EA, AB, BC şi respectiv CD. Să se arate că dreptele H_1M_1, H_2M_2, H_3M_3, H_4M_4 şi H_5M_3 sunt concurente.*

O.M., faza judeţeană, 2001

Soluţie. Alegem originea reperului în punctul O - centrul cercului circumscris pentagonului. Fie a, b, c, d, e afixele vârfurilor A, B, C, D şi respectiv E. Atunci punctul H_1 are afixul $h_1 = a + b + c$, iar afixul lui M_1 este $m_1 = \frac{1}{2}(d + e)$ etc. Este

[1] Profesori, Gr. şc. "V. Adamachi", Iaşi

uşor de verificat că punctul P de afix $\frac{1}{3}(a+b+c+d+e)$ aparţine tuturor dreptelor H_iM_i, $i=\overline{1,5}$ (se apelează la punctul 4 din lista de mai sus, cu $t=\frac{2}{3}$).

Exemplul 2. *Fie $A_1A_2A_3A_4$ un patrulater inscriptibil. Se notează H_1, H_2, H_3, H_4 ortocentrele triunghiurilor $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$ şi respectiv $A_1A_2A_3$. Să se demonstreze că patrulaterele $A_1A_2A_3A_4$ şi $H_1H_2H_3H_4$ sunt congruente.*

O.B.M., 1984, Atena

Soluţie. Se alege originea reperului în centrul cercului circumscris patrulaterului şi se notează cu z_i afixul punctului $A_i, i=\overline{1,4}$. În conformitate cu punctul 6 de mai sus, avem: $z_{H_1}=z_2+z_3+z_4$ etc. Se observă că $z_{H_i}-z_{H_j}=z_i-z_j$, $i,j=\overline{1,4}$ $(*)$. Ca urmare, $H_iH_j=|z_i-z_j|=A_iA_j$, $i\neq j$, $i,j=\overline{1,4}$. În consecinţă, cele două patrulatere au laturile omoloage congruente. Pentru a dovedi şi congruenţa unghiurilor omoloage, este suficient să arătăm că $H_iH_j \| A_iA_j$, $i\neq j$, $i,j=\overline{1,4}$. Acest fapt rezultă pe baza punctelor 2 şi 3 din lista de rezultate şi egalităţilor $(*)$.

Exemplele următoare indică un demers invers: probleme cu numere complexe sunt rezolvate prin mijlocirea geometriei sintetice.

Exemplul 3. *Fie $x,y,z\in\mathbf{C}$ astfel încât $|x|=|y|=|z|=1$ şi $x+y+z=0$. Arătaţi că există o infinitate de numere naturale pentru care $x^n+y^n+z^n=0$.*

O.M., faza locală, 1998, Iaşi

Soluţie. Se ştie că din $|x|=|y|=|z|=1$ şi $x+y+z=0$ rezultă că x,y,z sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral ABC cu centrul în originea reperului şi de rază egală cu unitatea.

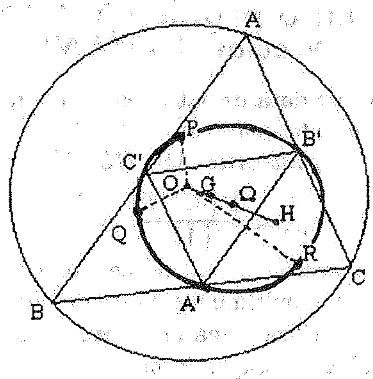
Fie $x=\cos\alpha+i\sin\alpha$, $y=\cos\beta+i\sin\beta$ şi $z=\cos\gamma+i\sin\gamma$ cu $\alpha,\beta,\gamma\in[0,2\pi)$ şi $\alpha<\beta<\gamma$. Atunci, avem: $m\left(\widehat{AOB}\right)=\beta-\alpha=\frac{2\pi}{3}$, $m\left(\widehat{BOC}\right)=\gamma-\beta=\frac{2\pi}{3}$, $m\left(\widehat{COA}\right)=\alpha-\gamma+2\pi=\frac{2\pi}{3}$.

Triunghiul $A'B'C'$ cu vârfurile de afixe $x^n, y^n, z^n, n\neq 3$, este de asemenea echilateral, căci $|x^n|=|y^n|=|z^n|=1$ şi unghiurile $\widehat{A'OB'}$, $\widehat{B'OC'}$, $\widehat{C'OA'}$ au măsuri egale (date de $n(\beta-\alpha)$, $n(\gamma-\beta)$ şi $n(\alpha-\gamma+2\pi)$ modulo 2π). Întrucât are loc şi implicaţia inversă celei utilizate mai sus, afixele vârfurilor triunghiului echilateral $A'B'C'$ verifică relaţia $x^n+y^n+z^n=0$, $\forall x\in\mathbf{N}^*$, $n\neq 3$.

Exemplul 4. *Fie $a,b,c\in\mathbf{C}$ verificând condiţia $|a|=|b|=|c|$. Arătaţi că* $\sum\left|\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right|\leq 3\sqrt{3}$.

Lucian-Georges Lăduncă

Soluţie. Fie A,B,C punctele din planul complex de afixe a,b şi respectiv c. Triunghiul ABC are centrul cercului circumscris în originea O a planului, raza acestui cerc fiind $\rho=|a|=|b|=|c|$. Fie $A'B'C'$ triunghiul median al triunghiului ABC şi P,Q,R simetricele punctului O faţă de $B'C', C'A', A'B'$ respectiv. Punctele P,Q,R se află pe cercul celor nouă puncte asociat triunghiului ABC (de centru Ω şi rază $\rho/2$); într-adevăr, se vede uşor că O este ortocentrul triunghiului median şi se ştie că simetricele ortocentrului faţă de laturile triunghiului se află pe cercul circumscris acestuia, care, în cazul nostru este cercul celor nouă puncte asociat triunghiului ABC.



Să calculăm perimetrul triunghiului PQR. Conform cu punctul 5 din introducere, afixele p, q, r ale vârfurilor sale sunt date de

$$p = \frac{(a+b)(a+c)}{2a}, \quad q = \frac{(b+c)(b+a)}{2b}, \quad r = \frac{(c+a)(c+b)}{2c}.$$

Utilizând aceste formule, obţinem după calcule simple:

$$PQ = |p-q| = \frac{|c|}{2}\left|\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right| = \frac{\rho}{2}\left|\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right|,$$

$$QR = \frac{\rho}{2}\left|\frac{b}{c} - \frac{c}{b}\right|, \quad RP = \frac{\rho}{2}\left|\frac{a}{c} - \frac{c}{a}\right|$$

Aşadar, $PQ + QR + RP = \frac{\rho}{2}\left(\left|\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right| + \left|\frac{b}{c} - \frac{c}{b}\right| + \left|\frac{a}{c} - \frac{c}{a}\right|\right).$

Pe de altă parte din teorema sinusurilor aplicată în triunghiul PQR, avem

$$PQ + QR + RP = 2\frac{\rho}{2}(\sin P + \sin Q + \sin R).$$

În consecinţă

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right| + \left|\frac{b}{c} - \frac{c}{b}\right| + \left|\frac{a}{c} - \frac{c}{a}\right| = 2(\sin P + \sin Q + \sin R).$$

De aici şi din cunoscuta inegalitate: $\sin P + \sin Q + \sin R \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$, rezultă inegalitatea dorită.

Bibliografie

[1] **D.Andrica, C.Varga, D. Văcăreţu** - *Teme de geometrie*, Ed. Promedia Plus, Cluj-Napoca, 1997.

[2] **M. Becheanu, I. Tomescu, B. Enescu, A. Vernescu** - *Manual pentru clasa a X-a*, Ed. Teora, Bucureşti, 2000.

[3] **M. Dincă, M. Chiriţă** - *Numere complexe în matematica de liceu*, Ed. All Educational, Bucureşti, 1966.