O privire axiomatică asupra integralei

Ştefan FRUNZĂ[1]

Vom începe cu observaţia că, pentru a utiliza un obiect, este suficient să cunoşti regulile sale de exploatare şi nu este necesar să cunoşti în detaliu construcţia obiectului; în momentul în care se defectează, apelezi la un specialist pentru eventuale reparaţii. Această observaţie se aplică în egală măsură obiectelor matematice. De exemplu, pentru a putea calcula limite de funcţii, este suficient să cunoşti câteva limite fundamentale precum şi regulile de calcul cu limite; la fel pentru primitive, derivate ş.a. Noţiunea de număr real se dezvăluie mai curând prin proprietăţile de bază. În matematică, spre deosebire de viaţa cotidiană, problema cu adevărat dificilă este să se demonstreze *existenţa* unui obiect cu proprietăţile cerute, mai cu seamă când acest obiect este şi unic (până la un izomorfism), aşa cum se întâmplă, de exemplu, cu sistemul numerelor reale. Observaţia de la care am pornit trebuie să aibă o reflectare şi în plan educaţional, punând accentul mai mult pe regulile de utilizare decât pe descrierea obiectului.

În cele ce urmează vom ilustra ideea de mai sus în cazul integralei definite. Să ne imaginăm o lecţie de sistematizare a cunoştinţelor despre integrala definită.

Trebuie să trecem în revistă proprietăţile cele mai simple şi mai des utilizate ale integralei definite. O parte din aceste proprietăţi se referă numai la funcţie, altele se referă numai la mulţimea de integrare (care este un interval închis şi mărginit); în fine, există şi proprietăţi mixte, care se referă atât la funcţie cât şi la interval. În cele ce urmează, când vorbim despre intervalul $[a, b]$, vom presupune totdeauna că $a < b$. De asemenea, vom lăsa intenţionat la o parte ipotezele de integrabilitate în formularea proprietăţilor.

Proprietăţi referitoare la funcţie:

(A) $\displaystyle\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ (aditivitatea în raport cu funcţia);

(O) $\displaystyle\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, $k = const.$ (omogenitatea în raport cu funcţia);

(P) Dacă $f \geq 0$, în sensul că $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \geq 0$, atunci $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Din **(A)**, **(O)** şi **(P)** se deduce cu uşurinţă proprietatea de monotonie crescătoare a integralei în raport cu funcţia:

(M) Dacă $f \geq g$, atunci $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

Strâns legată de monotonie este şi prima proprietate de medie.

(Me) Dacă $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [a, b]$, atunci $\displaystyle m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

[1] Conf. dr., Facultatea de Matematică, Univ. "Al. I. Cuza", Iaşi

Proprietăţi referitoare la interval:

(Ad) Dacă $a < c < b$, atunci $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$ (aditivitatea în raport cu intervalul). Aceasta poate fi formulată sugestiv în două variante:

(V_1) Dacă f este integrabilă (are integrală) pe $[a, c]$ şi $[c, b]$, atunci este integrabilă şi pe $[a, b]$ şi are loc egalitatea **(Ad)**.

(V_2) Dacă f este integrabilă (are integrală) pe $[a, b]$, atunci este integrabilă atât pe $[a, c]$ cât şi pe $[c, b]$ şi are loc egalitatea **(Ad)**.

Proprietăţi mixte:

Dintre acestea merită menţionată *formula schimbării de variabilă*, care angajează atât schimbarea funcţiei cât şi a intervalului.

(S) Dacă $x = \varphi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, este derivabilă, cu derivata continuă, atunci:

$$\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

(iarăşi am trecut intenţionat peste ipotezele de integrabilitate).

În privinţa integrabilităţii, merită reţinute cele două clase importante de funcţii: clasa funcţiilor continue şi clasa funcţiilor monotone.

Ar mai fi nevoie să reţinem că integrala unei funcţii este un număr, care se poate schimba atunci când se schimbă funcţia. Deci integrala este o funcţie ca oricare alta! De fapt nu pare să fie chiar aşa, deoarece variabila este ea însăşi o funcţie; pentru a marca acest etaj superior de abstracţie, matematicianul italian **Vito Volterra** (1860 - 1940) a introdus în uz termenul de *funcţională*. Aşadar, integrala este o funcţională definită pe o clasă de funcţii (de preferinţă, cât mai vastă).

Am ajuns astfel la punctul de vedere axiomatic la care am făcut aluzie în titlul articolului. Iată o posibilă *definiţie axiomatică a integralei definite*:

Să admitem că pentru fiecare funcţie f continuă pe porţiuni pe intervalul $[a, b]$ şi fiecare interval $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ se pune în corespondenţă un număr $\mathbf{I}_\alpha^\beta(f)$ satisfăcând următoarele cerinţe:

1. $\mathbf{I}_\alpha^\beta(kf) = k\mathbf{I}_\alpha^\beta(f)$, pentru orice constantă $k \in \mathbf{R}$ şi orice funcţie f continuă pe porţiuni;
2. $\mathbf{I}_\alpha^\beta(f + g) = \mathbf{I}_\alpha^\beta(f) + \mathbf{I}_\alpha^\beta(g)$, pentru orice funcţii f şi g continue pe porţiuni;
3. $\mathbf{I}_\alpha^\beta(f) \geq 0$, pentru orice funcţie $f \geq 0$ continuă pe porţiuni şi orice $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$;
4. $\mathbf{I}_\alpha^\beta(1) = \beta - \alpha$, pentru orice $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$;
5. $\mathbf{I}_\alpha^\beta(f) = \mathbf{I}_\alpha^\gamma(f) + \mathbf{I}_\gamma^\beta(f)$, pentru orice α, β, γ cu $\alpha < \gamma < \beta$ şi orice funcţie f.

(O funcţie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ se numeşte *continuă pe porţiuni* pe $[a, b]$ dacă este continuă în fiecare punct din $[a, b]$, cu excepţia unei mulţimi finite de puncte, care sunt puncte de discontinuitate de speţa întâi.)

Teoremă (de unicitate). *În condiţiile precedente, are loc egalitatea*

$$\mathbf{I}_\alpha^\beta(f) = \int\limits_\alpha^\beta f(x)dx,$$

pentru orice funcţie f continuă pe porţiuni pe $[a, b]$ şi orice $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$.

Demonstraţie. E suficient să demonstrăm că
$$\mathbf{I}_a^b(f) = \int_a^b f(x)dx.$$
Fie $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ o diviziune oarecare a intervalului $[a, b]$. Aplicând **5**, deducem:
$$\mathbf{I}_a^b(f) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{I}_{x_{i-1}}^{x_i}(f). \tag{1}$$
Aplicând **1**, **2**, **3** şi **4** avem:
$$m_{\alpha,\beta}(\beta - \alpha) \leq \mathbf{I}_\alpha^\beta(f) \leq M_{\alpha,\beta}(\beta - \alpha), \tag{2}$$
unde $m_{\alpha,\beta} = \inf\{f(x);\ x \in [\alpha, \beta]\}$ şi $M_{\alpha,\beta}$ este marginea superioară a aceleiaşi mulţimi. În particular,
$$m_i\delta x_i \leq \mathbf{I}_{x_{i-1}}^{x_i}(f) \leq M_i\delta x_i, \quad i = \overline{1,n}. \tag{3}$$
Din (3), prin adunare, obţinem conform cu (1):
$$\sum_{i=1}^{n} m_i\delta x_i \leq \mathbf{I}_a^b(f) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i\delta x_i, \quad i = \overline{1,n}, \tag{4}$$
adică
$$\underline{S}(f, \Delta) \leq \mathbf{I}_a^b(f) \leq \overline{S}(f, \Delta). \tag{4'}$$
Fie ξ un sistem de puncte intermediare pentru Δ (i.e. $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\forall i = \overline{1,n}$) şi
$$S(f, \Delta, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\delta x_i$$
suma Riemann corespunzătoare. Din (4') deducem:
$$\underline{S}(f, \Delta) - \overline{S}(f, \Delta) \leq S(f, \Delta, \xi) - \mathbf{I}_a^b(f) \leq \overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta), \tag{5}$$
adică
$$\left|S(f, \Delta, \xi) - \mathbf{I}_a^b(f)\right| \leq \overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta). \tag{5'}$$
Întrucât orice funcţie f continuă pe porţiuni este integrabilă Riemann ([**1**], [**2**]), atunci, aplicând criteriul de integrabilitate al lui Darboux, deducem:
$$\lim_{\lambda(\Delta)\to 0} [\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta)] = 0, \tag{6}$$
şi deci, conform cu (5'),
$$\lim_{\lambda(\Delta)\to 0} S(f, \Delta, \xi) = \mathbf{I}_a^b(f). \tag{7}$$
Observaţii: 1° Rezultatul rămâne valabil pentru orice funcţie integrabilă Riemann.

2° Rezultatul rămâne valabil dacă se înlocuieşte **3** prin

3'. $\left|\mathbf{I}_\alpha^\beta(f)\right| \leq C \sup_{[\alpha,\beta]} |f(x)|$, unde C e o constantă fixată (conform [**3**]).

Bibliografie

[1] **N. Boboc, I. Colojoară** - *Elemente de analiză matematică, Manual pentru clasa a* **XII**-*a*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1987.
[2] **S. Frunză** - *Analiză Matematică*, p. a **II**-a, vol. **I**, Univ. "Al. I. Cuza" Iaşi, 1987.
[3] **G. E. Şilov** - *Analiză Matematică. Funcţii de o variabilă*, Ed. Şt. Encicl., Buc., 1985.