NOTE MATEMATICE

Câteva aplicaţii ale inversiunii

Constantin COCEA[1]

În cele ce urmează vom da câteva aplicaţii ale transformării prin inversiune.

Aplicaţia 1. *Fie $ABCD$ un tetraedru înscris în sfera $S(O;R)$. Înălţimea din A a tetraedrului taie planul (BCD) în A' şi sfera S în A_1 ($A_1 \neq A$). Notăm cu B_1, C_1, D_1 proiecţiile lui A_1 pe dreptele AB, AC respectiv AD. Să se arate că punctele A', B_1, C_1, D_1 sunt coplanare.* (**C. Cocea**, *Problema X.15*, Recr. mat., 2 / 2000)

Demonstraţie. Triunghiurile dreptunghice ABA' şi AB_1A_1 sunt asemenea, deci

$$\frac{AB}{AA_1} = \frac{AA'}{AB_1} \quad \Leftrightarrow \quad AB \cdot AB_1 = AA' \cdot AA_1 \tag{1}$$

Analog obţinem

$$AC \cdot AC_1 = AD \cdot AD_1 = AA' \cdot AA_1 \,. \tag{2}$$

Fie $\mathfrak{I}$ inversiunea de pol A şi putere k, unde $k^2 = AA' \cdot AA_1$. Relaţiile (1), (2) arată că

$$\mathfrak{I}(B) = B_1;\ \mathfrak{I}(C) = C_1;\ \mathfrak{I}(D) = D_1;\ \mathfrak{I}(A_1) = A'.$$

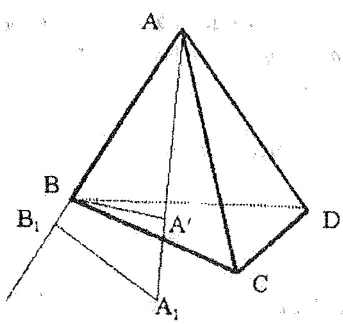
Cum punctele B, C, D, A_1 sunt pe sfera S, ce trece prin polul de inversiune A, urmează că transformatele lor se vor găsi într-un plan (transformatul sferei S). Deci, punctele A', B_1, C_1, D_1 sunt coplanare.

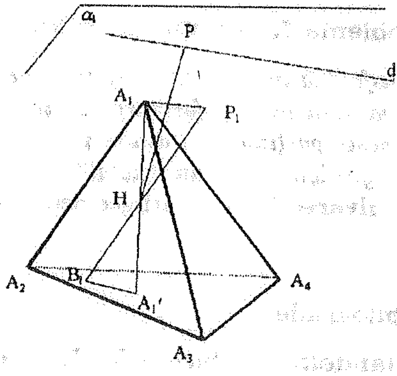
Aplicaţia 2. *Fie $A_1A_2A_3A_4$ un tetraedru ortocentric cu ortocentrul H, iar d o dreaptă în spaţiu. Perpendicularele din H pe planele $\alpha_i = (A_i, d)$ taie feţele opuse vârfurilor A_i în B_i ($i = \overline{1,4}$). Să se arate că punctele B_1, B_2, B_3, B_4 sunt coplanare.* (**C. Cocea** - Barajul II pentru selectarea echipei României la O.I.M. 1985)

Demonstraţie. Fie A_1', A_2', A_3', A_4' picioarele înălţimilor tetraedrului. Din asemănări de triunghiuri rezultă uşor egalităţile:

$$\overline{HA_1} \cdot \overline{HA_1'} = \overline{HA_2} \cdot \overline{HA_2'} = \overline{HA_3} \cdot \overline{HA_3'} = \overline{HA_4} \cdot \overline{HA_4'} \tag{3}$$

(v. şi [5], Probl. 677, pp. 73 şi 257). Notăm cu k^2 valoarea comună termenilor din (3).



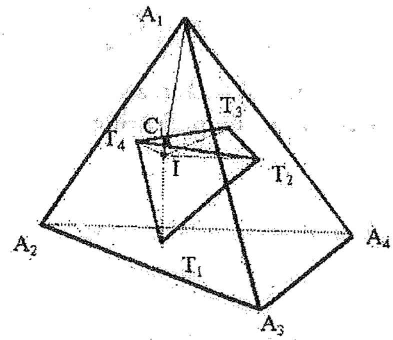


[1] Profesor, Lic. "D. Cantemir", Iaşi

Fie P proiecţia lui H pe d, iar P_i proiecţia lui H pe planul $\alpha_i = (A_i, d)$, $(i = \overline{1,4})$. Triunghiul PP_iH este dreptunghic în P_i, deci P_i se află pe sfera de diametru (PH). Tot din asemănări de triunghiuri rezultă $\overline{HP_i} \cdot \overline{HB_i} = k^2$, $(i = \overline{1,4})$.

Considerând inversiunea $\mathfrak{I}(H;k)$, cele de mai sus arată că punctele B_i sunt transformatele punctelor P_i prin inversiunea $\mathfrak{I}(H;k)$. Cum P_i se găsesc pe sfera de diametru (PH), rezultă că punctele B_i se vor găsi într-un plan (transformatul sferei de diametru (PH) prin inversiunea $\mathfrak{I}$). Acest plan este perpendicular pe diametrul (PH), deci paralel cu d.

Aplicaţia 3. *Fie $A_1A_2A_3A_4$ un tetraedru, I centrul sferei înscrise, iar T_1, T_2, T_3, T_4 proiecţiile punctului I pe feţele tetraedrului. Notăm cu C_1, C_2, C_3, C_4 centrele cercurilor circumscrise feţelor tetraedrului $T_1T_2T_3T_4$. Să se arate că punctul I şi centrele sferelor circumscrise tetraedrelor $A_1A_2A_3A_4$ şi $C_1C_2C_3C_4$ sunt coliniare.* (C. Cocea, [1], p. 97)



Demonstraţie. Avem:
$IT_2 = IT_3 = IT_4 = r$ (raza sferei înscrise) (4)
şi $\widehat{A_1T_2I} = \widehat{A_1T_3I} = \widehat{A_1T_4I} = 90°$, deci $\Delta A_1T_2I \equiv \Delta A_1T_3I \equiv \Delta A_1T_2I$, prin urmare $A_1C_1 \perp (T_2T_3T_4)$.

Cum are loc (4), rezultă $IC_1 \perp (T_2T_3T_4)$. Deci punctele A_1, C_1, I sunt coliniare.

Deoarece $T_4C_1 \perp A_1C_1$, din teorema catetei aplicată în triunghiul A_1T_4I, avem:

$$r^2 = IT_4^2 = IC_1 \cdot IA_1 \tag{5}$$

Analog:

$$r^2 = IC_2 \cdot IA_2 = IC_3 \cdot IA_3 = IC_4 \cdot IA_4. \tag{6}$$

Rezultă că tetraedrul $C_1C_2C_3C_4$ se obţine din tetraedrul $A_1A_2A_3A_4$ printr-o inversiune $\mathfrak{I}$ de pol I şi putere r. Atunci sfera circumscrisă tetraedrului $A_1A_2A_3A_4$ se transformă în sfera circumscrisă tetraedrului $C_1C_2C_3C_4$. Urmează coliniaritatea cerută.

Aplicaţia 4. *Fie $A_1A_2...A_n$ un poligon convex regulat înscris în cercul $\mathcal{C}(O;R)$, iar M un punct pe arcul mic $\widehat{A_1A_2}$. Notăm cu d_i distanţa de la M la latura A_iA_{i+1}, $i = \overline{1,n}$ $(A_{n+1} \equiv A_1)$. Să se arate că:*

$$\frac{1}{d_1} = \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_3} + ... + \frac{1}{d_n}.$$

(**C. Cocea, D. Brânzei** - Barajul pentru selectarea echipei României la O.I.M. 1998)

Demonstraţie. Considerăm inversiunea $\mathfrak{I}$ de pol M şi putere k. Cercul $\mathcal{C}$ se va transforma într-o dreaptă d pe care se găsesc punctele A_i' (transformatele punctelor A_i), în ordinea:

$$A_2' - A_3' - A_4' - ... - A_n' - A_1' .$$

Scriind că

$$A_1'A_2' = \sum_{i=2}^{n} A_i'A_{i+1}' \qquad (A_{n+1}' \equiv A_1')$$

şi utilizând faptul că prin inversiunea $\mathfrak{I}$, are loc relaţia

$$P'Q' = PQ \cdot \frac{k^2}{MP \cdot MQ},$$

unde P', Q' sunt transformatele punctelor P respectiv Q, obţinem:

$$\frac{k^2 \cdot A_1A_2}{MA_1 \cdot MA_2} = \sum_{i=2}^{n} \frac{k^2 \cdot A_iA_{i+1}}{MA_i \cdot MA_{i+1}}.$$

Dar

$$MA_i \cdot MA_{i+1} = \frac{2\sigma\,[MA_iA_{i+1}]}{\sin(\sphericalangle A_iMA_{i+1})} = \frac{A_iA_{i+1} \cdot d_i}{\sin(\sphericalangle A_iMA_{i+1})} = 2Rd_i \quad (i = \overline{1,n}).$$

Înlocuind şi ţinând seama că $A_iA_{i+1} = l$ – latura poligonului regulat, obţinem, după efectuarea simplificărilor, relaţia cerută:

$$\frac{1}{d_1} = \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_3} + \ldots + \frac{1}{d_n}.$$

Bibliografie

[1] **Cocea C.**, *Noi probleme de geometrie*, Editura "Gh. Asachi", 1997.

[2] **Duican L.**, **Duican I.**, *Transformări geometrice*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1997.

[3] **Ianuş S. ş.a.** *Probleme de geometrie şi trigonometrie pentru clasele* IX - X, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.

[4] **Smaranda D.**, **Soare N.**, *Transformări geometrice*, Editura Academiei, Bucureşti, 1988.

[5] **Ţiţeica Gh.**, *Culegere de probleme de geometrie*, ed. a III-a, Editura Tehnică, Bucureşti, 1956.