Asupra problemei XII.9 din Recreaţii Matematice

Adrian CORDUNEANU[1], *Dan-Ştefan MARINESCU*[2], *Ioan ŞERDEAN*[3]

Problema XII.9 apărută în Recreaţii Matematice nr. 1 (2000), pentru care se dă soluţia în nr.1 (2001), pag. 72, are următorul enunţ:

Fie $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ *o funcţie continuă oarecare. Să se arate că*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{f(x^n)}{1+x} dx = f(0) \ln 2 . \qquad (1)$$

Se observă cu uşurinţa o generalizare a acestui rezultat - fapt ce poate fi dovedit în acelaşi mod sau pe o nouă cale ce o oferim în continuare:

Propoziţia 1. *Dacă* $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ *este funcţie continuă şi* $g : [0,1] \to \mathbf{R}$ *este integrabilă, atunci*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x^n)\, g(x)\, dx = f(0) \int_0^1 g(x)\, dx. \qquad (2)$$

Demonstraţie. Putem presupune că $|g(x)| \leq 1$, $x \in [0,1]$; în caz contrar, înlocuim g cu $\frac{1}{M} g$, unde $M = \sup\{|g(x)|\,;\, x \in [0,1]\}$. Ştim că o funcţie continuă poate fi aproximată uniform cu o funcţie lipschitziană (şi chiar polinomială!). Aşadar, $\forall \varepsilon > 0$ există o funcţie lipschitziană $h : [0,1] \to \mathbf{R}$ (i.e. se poate indica $L > 0$ astfel încât $|h(x) - h(y)| \leq L|x-y|$, $\forall x, y \in [0,1]$) ce satisface condiţia

$$|f(x) - h(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, x \in [0,1].$$

Atunci putem găsi un număr $n_0 \in \mathbf{N}$ încât $\forall n \geq n_0$ să avem:

$$\left| \int_0^1 f(x^n)\, g(x)\, dx - f(0) \int_0^1 g(x)\, dx \right| \leq \left| \int_0^1 [f(x^n)\, g(x) - h(x^n)\, g(x)]\, dx \right| +$$

$$+ \left| \int_0^1 [h(x^n)\, g(x) - h(0)\, g(x)]\, dx \right| + \left| \int_0^1 [h(0)\, g(x) - f(0)\, g(x)\, dx] \right| \leq$$

$$\leq \int_0^1 |f(x^n) - h(x^n)|\, dx + L \int_0^1 |x^n - 0|\, dx + \int_0^1 |h(0) - f(0)|\, dx \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{L}{n+1} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon,$$

de unde decurge (2).

Plecând de la relaţia (2), apare în mod natural întrebarea ce se poate spune despre limita

[1] Prof. dr., Univ. Tehnică "Gh. Asachi", Iaşi

[2] [3] Profesori, Lic. Teoretic "Iancu de Hunedoara", Hunedoara; Col. Naţ. "Aurel Vlaicu", Orăştie

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 (f(x^n)-f(0))\,g(x)\,dx. \tag{3}$$

Scopul acestei note este de a calcula limita (3), în condiţii suplimentare impuse funcţiilor f şi g.

Propoziţia 2. *În ipotezele*
(a) f este continuă pe $[0,1]$ şi derivabilă (la dreapta) în $x=0$;
(b) g are derivată integrabilă pe $[0,1]$ şi $g(1)=0$;
are loc relaţia

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 (f(x^n)-f(0))\,g(x)\,dx = 0. \tag{4}$$

Demonstraţie. Fără a micşora generalitatea, putem presupune $|g(x)|\le 1$ pe intervalul $[0,1]$. Funcţia $\varphi:[0,1]\to\mathbf{R}$, dată prin

$$\varphi(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x} \tag{5}$$

pentru $0<x\le 1$ şi $\varphi(0)=f'(0)$ este continuă pe $[0,1]$. Scriind

$$n\int_0^1 (f(x^n)-f(0))\,g(x)\,dx=\int_0^1 \varphi(x^n)\,nx^n g(x)\,dx \tag{6}$$

şi ţinând seama că pentru $x\in(0,1)$ avem $\varphi(x^n)\to f'(0)$ când $n\to\infty$, vom considera şi integrala

$$\int_0^1 f'(0)\,nx^n g(x)\,dx\,. \tag{7}$$

Vom arăta mai întâi că

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 \varphi(x^n)\,nx^n g(x)\,dx-\int_0^1 f'(0)\,nx^n g(x)\,dx\right)=0. \tag{8}$$

Pentru orice δ, $0<\delta<1$, putem scrie

$$\begin{aligned}\int_0^1 (\varphi(x^n)-f'(0))\,nx^n g(x)\,dx &= \int_0^\delta (\varphi(x^n)-f'(0))\,nx^n g(x)\,dx+ \\ &+\int_\delta^1 (\varphi(x^n)-f'(0))\,nx^n g(x)\,dx\end{aligned} \tag{9}$$

şi presupunem $|\varphi(x^n)-f'(0)|\le M$ pentru $x\in[0,1]$. Pentru $\varepsilon>0$ dat, fixăm $\delta\in(0,1)$ astfel încât să avem $|g(x)|<\varepsilon/2M$ pentru $x\in[\delta,1]$. Rezultă

$$\int_\delta^1 |\varphi(x^n)-f'(0)|\,nx^n\,|g(x)|\,dx\le M\frac{\varepsilon}{2M}\int_\delta^1 nx^n dx=\frac{\varepsilon}{2}\frac{n}{n+1}\left(1-\delta^{n+1}\right)<\frac{\varepsilon}{2} \tag{10}$$

oricare ar fi $n = 1, 2, 3, \ldots$ Apoi avem

$$\int_0^\delta |\varphi(x^n) - f'(0)| \, nx^n \, |g(x)| \, dx \le M \int_0^\delta nx^n dx = M \frac{n}{n+1} \delta^{n+1} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{11}$$

dacă $n \ge N(\varepsilon)$. Din ultimele trei relaţii, rezultă că egalitatea (8) este adevărată. Acum, vom arăta că

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f'(0) \, nx^n g(x) \, dx = 0. \tag{12}$$

În acest scop, scriem

$$\int_0^1 nx^n g(x) \, dx = \int_0^1 (n+1) x^n g(x) \, dx - \int_0^1 x^n g(x) \, dx \tag{13}$$

şi avem $\int_0^1 x^n g(x) \, dx \to 0$ când $n \to \infty$, folosind (2) în care luăm $f(x) \equiv x$.

Apoi, găsim

$$\int_0^1 (n+1) x^n g(x) \, dx = \int_0^1 g(x) \left(x^{n+1}\right)' dx = g(1) - \int_0^1 x^{n+1} g'(x) \, dx = -\int_0^1 x^{n+1} g'(x) \, dx \tag{14}$$

şi folosind din nou (2), ajungem la concluzia că (12) este adevărată. În fine, ţinând seama de (12), (8), (6), rezultă că relaţia (4) este adevărată. Q.E.D.

Propoziţia 3. *În ipotezele*
(a) f este continuă pe $[0,1]$, derivabilă în $x = 0$ şi $f(1) = f(0) + f'(0)$;
(b) g are derivată integrabilă pe $[0,1]$,
are loc relaţia

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 (f(x^n) - f(0)) \, g(x) \, dx = f'(0) \, g(1). \tag{15}$$

Demonstraţie. Fără a micşora generalitatea, putem presupune $|g(x)| \le 1$ pe $[0,1]$. Putem din nou majora integrala din (10) prin $\varepsilon/2$, fixând $\delta > 0$ suficient de mic, astfel încât să avem $|\varphi(x^n) - f'(0)| < \varepsilon/2$ pe $[\delta, 1]$, ceea ce este posibil, căci funcţia continuă $\varphi(x^n) - f'(0)$ se anulează în $x = 1$. Într-adevăr, $\varphi(1) - f'(0) = f(1) - f(0) - f'(0) = 0$, conform ipotezei. Cu acest δ, putem folosi din nou majorarea (11), dacă $n \ge N(\varepsilon)$. Astfel formula (8) rămâne valabilă şi de data aceasta. Formula (13) este şi ea adevărată, astfel că acum, în loc de (12), vom obţine

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f'(0) \, nx^n g(x) \, dx = f'(0) \, g(1),$$

ceea ce încheie demonstraţia.